中小学课程与数学文化研究成果之一

数学的历史文化赏析

张映姜　陈美英　李晓培　著

湖南师范大学出版社

数学的历史文化赏析

本书从中小学数学的核心内容，如分数、负数、无理数、复数、三角、点、圆、三角形、多边形、对数、圆锥曲线、尺规作图、微积分、概率、排列等，来展现数学发展的历史轨迹以及数学的文化内涵。本书集知识性、趣味性、经典性、历史性、文化性于一体，内涵丰富、生动形象、通俗易懂、朗朗上口、经典实用。从数学思维、数学精神、数学魅力、数学审美、数学交流等方面展现数学的魅力和文化价值。

责任编辑 廖小刚
王艺文
装帧设计 周基东

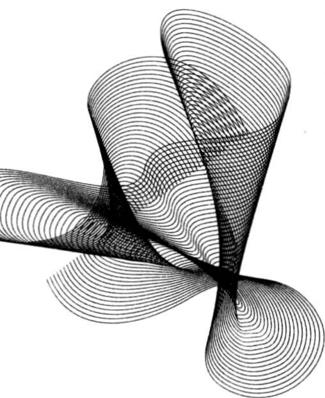


ISBN 978-7-5648-1363-5



定价：25.00元

湛江师范学院学术著作出版



中小学课程与数学文化研究成果之一

数学的历史文化赏析

张映姜　陈美英　李晓培　著

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学的历史文化赏析／张映姜，陈美英，李晓培著．—长沙：湖南师范大学出版社，2013.8

ISBN 978－7－5648－1363－5

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①张…　②陈…　③李…　Ⅲ．①数学史　Ⅳ．①O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 170636 号

数学的历史文化赏析

张映姜　陈美英　李晓培　著

◇组稿编辑：王艺文　廖小刚
◇责任编辑：廖小刚　王艺文
◇责任校对：胡成玲
◇出版发行：湖南师范大学出版社
地址／长沙市岳麓山　邮编／410081
电话／0731.88853867　88872751　传真／0731.88872636
网址／http：//press.hunnu.edu.cn
◇经销：湖南省新华书店
◇印刷：长沙市华中印刷厂
◇开本：787mm×1092mm　1/16
◇印张：12.25
◇字数：249 千字
◇版次：2013 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
◇书号：ISBN 978－7－5648－1363－5
◇定价：25.00 元

序 言

数学的历史文化比数学知识体系本身更具有丰富和深邃的内涵.数学的历史是数学文化发展的见证.数学与社会进步同行;数学与人类文化共生.数学文化的历史,以其独特的思想体系,保留并记录了人类在特定社会的形式和特定历史阶段文化发展的状态.数学文化源远流长;数学文化丰富多彩.

从数到方程、到函数,从几何到微积分、到排列组合,数学的发展历经数千年的沧海桑田,不断的冲突,不断的创新;不断的矛盾,不断的完善.思维的挑战与文化的融合,不断凸显了数学的和谐与文化的魅力.

代数、几何、三角是经典数学文化的三大支柱.

数是数学文化的起点.分数的历史,是数学文化实用性的体现,是中国古代数学辉煌的见证;分数是人类历史上重要的文化成果,是初等数学中内涵丰富的重要概念;分数的内涵和分数的运算规则,体现了人类创新活动的轨迹,分数的历史名题是人类的精神财富;我们不仅要了解分数的概念,而且更要重视分数的历史文化精神.负数也是数学中非常重要同时也是第一个难以理解的概念,人类对历史悠久的负数概念的认识极为曲折坎坷;负数源于现实、来自古老的东方,展现了早期东方数学博大精深的文化魅力.无理数是实数集中重要的组成部分;无理数的产生与发展见证了人类数学发展的坎坷历程,体现了数学家对其思考的逐步深化.复数的创立折射出数学创新的规律;数学理论的创建首先是观念上的突破;荒唐的虚数概念的建立是人类数学创造的又一个缩影;虚数起源于代数方程求解,

复数概念的形成源于观念的突破,复数因其几何解释及其广泛应用最终获得确认.

式是构建方程与函数的重要基础.方程不仅在数学领域上起着举足轻重的作用,在我们的日常生活中也有着广泛的应用.数千年方程的历史文化留下来的不仅仅是方程的概念和应用,而更多留下的是数学家对方程的执著追求,以及勇于进取,敢于接受智力挑战,还有处理已知与未知时平等对待、一同满足某一等量关系的态度,以及构建方程解决问题的策略.追溯方程的历史文化,既能领悟人类历史上数学家超常的智慧,又能体验到方程与人们生活的关系,特别是体验到数学家离奇的游戏.既可学习丰富的方程知识,又能经历数学文化发展的过程.对数技术是数学家的创新,正如拉普拉斯所说,一个人的寿命如果不拿他活在世界上的时间的长短来计算,而拿他一生中所做工作多少来衡量,那么可以说,对数的发现不仅避免了冗长的计算与可能性的误差,而且实际上倍延了天文学家的寿命.我们有必要了解对数的文化特性,研究对数的文化历程.数列是中小学数学中一个核心的内容,它的诞生体现出了人类高超的睿智,数列中的历史文化因素推动了数列的不断发展.追寻数列产生的历史,追踪数列发展的轨迹,品味经典数列的名题,必能体验到数列的文化内涵,享受纯厚的数学文化熏陶.函数是微积分学中的重要概念,人们对变量认识的深刻程度影响着函数概念的理解和掌握;函数的本质乃是变量间的对应关系;函数概念为函数性质的研究、微积分的发展都起到了重要的作用;研究函数概念,不仅可以了解人类的社会活动如何促进函数概念的形成,而且还可以发现函数概念是如何形成与发展这一奥秘.

点、线、面、体是几何的重要元素.点的历史悠久;点是构造图形的最小的几何元素;点在几何学中只表明位置但不具备面积和方向.阿基米德曾说:"如果给我一个支点,我可以撑起整个地球";毕达哥拉斯认为,点是只有位置而没有大小的单位;柏拉图认为,点是直线的开端或点是不可分割的线.毕达哥拉斯学派研究发现了"形数"和"点"的奥秘,形数是使用某种

三角点式来表示,用点排成图形;毕达哥拉斯很会用“点”表示数,如三角形数、正方形数、五边形数;三角形数、正方形数、正五边形数等恰当形象地、具体地、直观地用点阵展现它们的特征.三角形是几何的心脏和奠基石,经历无数春秋的洗礼,经受漫长曲折的历练,沉淀的三角形历史文化极为丰富;从古埃及的金字塔到中国半坡出土文物,从中国的《周髀算经》、《九章算术》到西方欧几里得的《几何原本》,三角形的历史极其悠久,对其认识也极为深刻.

三角是数学中的重要内容,包括三角线、全弦长、正余弦、正余切,还有大量的经典定理.其中三角的弦表经历过漫长的发展历程,由全弦长到半弦长,从弧的半弦再到角的半弦,体现人类思维的巨大飞跃.了解三角的文化、历史,理解三角知识,认识到三角文化发展的继承性、发展性和延续性,意识到三角是人类对宇宙充满好奇与探索的结果;重视三角文化、历史对于了解三角的发展历程具有重要的意义;我们有必要探究三角历史,丰富数学内涵;研究正、余切应用,丰富三角体验;探究三角线形成,理解三角概念;欣赏历史名题,体验三角经典.

概率、统计、微积分是现代数学的经典之作.排列与组合是概率与统计的重要基础;排列与组合是一个古老的数学问题,也是中小学数学中的重要内容,它的思维方式与别的内容迥然不同.生活中最重要的问题,其中绝大多数在实质上只是概率的问题.概率论的诞生,虽然来源于或然游戏,但在今天,概率论却成为人类知识的最重要的组成部分.微积分是数学发展史上的里程碑,是欧氏几何后又一次伟大的创造;微积分的出现,与其说是整个数学史,不如说是整个人类历史的一件大事;数学史家常将数学比作一棵大树,树根是那些最基本的学科如算术、代数、几何、三角、解析几何等,树干的主要部分就是微积分,顶上的树枝是名目繁多的各门数学;微积分堪称是人类智慧最伟大的成就之一.

数学的发展就像精彩的故事一样,波澜起伏,扣人心弦,既在情理之中,又在意料之外,是奇异与和谐的神奇的完美统一.《数学的历史文化赏

析》一书以数学发展的历史为线索,揭示了数学丰富的文化内涵,为我们重新认识数学、欣赏数学提供了一个全新的视觉.该书读后能让人对数学课程内容的历史文化有更深入的理解,尤其可以增强高师院校数学专业学生更生动形象、内涵丰富的数学认知,促进数学教师专业发展,强化与数学相关的职业精神,满足师生对数学文化学习或教学的要求.

全书分五章进行论述,从数与符号、代数、函数、几何与现代数学等方面展示了数学发展的文化轨迹.作者通过大量相关资料,揭示了人类对思维的挑战和对数学文化魅力的体验;让人能体味到数学家的审美眼光;领略数学的理性精神和数学创新的规律;了解数学文化价值;追踪数学产生、发展、繁荣中人类的足迹.读完这本书,我们会有这样的感觉:数学知识尊重历史,内容通俗易懂;既体现了数学的知识性,也体现了数学的趣味性;既能为基础教育中数学教师提供文化素材,又能熏陶学生的文化素养.

书中内容主要针对中小学课程而进行相应的数学历史文化研究,所以该研究成果适合中小学数学教师阅读,有利于促进数学教师的专业成长.书中引用的材料较为通俗,所举案例经典有趣,必为中学生以及关注中小学数学教育的各界人士所喜爱.另外,该书与中小学数学课程内容结合紧密,以及通俗易懂的经典案例,所以此书还是高师院校数学教育专业学生的首选读物.读完全书能迅速丰富高师学生的课程资源,让其体验数学的人文精神,促进良好数学观的形成.我们希望,有更多的专家能够关注中小学数学文化教育的研究,推出更多通俗易懂、生动有趣的数学文化读物,为提高我国基础教育的数学教育水平作出应有的贡献!

全国高师数学教育研究会常务理事
广东高师数学教育研究会副理事长　　**曾　峥**
韶关学院党委书记、教授

2013年7月21

前　言

教育是文化的传承.顾明远先生把教育比做一条“河”,文化则是这条“河”的源头和源源不断注入的“活水”,文化能保持这条“河”永远具有活力.数学文化有助于数学教育这条“河”的激活,能触动我们的灵魂,提升数学创新,培养理性精神.中小学数学中蕴涵的历史文化能提高对数学学习的兴趣,利于数学意义的建构,推动数学教育的发展.不难理解我国《数学课程标准》要求加强数学文化的教学,在数学课程应介绍数学发展的历史、应用和趋势.我们已意识到,中小学数学的历史文化在编制数学课程、体验数学文化、欣赏数学经典、建构数学意义方面对教育的重要作用.

1. 体验数学文化的魅力

简洁的数学知识却蕴含着丰富多彩的历史文化,中西方文化土壤不同,但共同“孕育”了勾股定理,勾股定理被称之为商高定理、或毕达哥拉斯定理、或百牛定理等.几千年来,中西方数学家对勾股定理的研究有着难抑的激情,他们不知疲倦、乐醉其中.几何中,拿破仑三角形、莫莱三角形、黄金三角形、阿基米德三角形等许多精致的三角形,让我们感受到数学文化的瑰宝,让我们津津乐道、回味无穷.这一切为我们带来愉悦的体验和心灵的慰藉.掷骰子、抛硬币等许多数学研究中渗透着许多数学家挚热的情感、不懈的追求,体现数学家对真理的孜孜追求,这一切都深深触动着我们的灵魂.教育是灵魂的教育……只有被灵魂所接受的才能成为精神瑰宝([德]雅斯贝尔斯).历史文化的融入展示数学的魅力,弘扬数学精神,促进数学发展.

2. 展示数学经典的奇妙

数学上许多经典名题恰如亮晶晶的宝石，犹如晶莹剔透的明珠，点缀着数学的美丽天空，闪耀着数学家的智慧．概率统计中的棣莫弗的取白、摸球、蒙摩装错信封、生日问题等经典概型让我们终身难忘，回味无穷．法国数学家拉普拉斯曾说：概率论来源于或然性游戏，人类生活中许多现实问题提供了经典概率问题．我们从中可以领略到人类绝妙的思维、精湛的艺术．

3. 文化融入改善数学课程

数学课程的现代化，需要经典历史文化内涵的巧妙还原，达到“数学文化应尽可能有机地结合数学课程的内容”，数学知识是形、历史文化是“神”，只有历史文化巧妙融入知识当中，才能形神兼备．数、点、函数、三角形、多边形、圆锥曲线等中小学数学的核心内容中融入丰富多彩的数学文化，实现数学课程的多元化．数学中的历史文化经典案例，尤其是我国古代数学中不仅蕴涵大量的、极具价值的数学案例，而且还有珍贵的数学名题、底蕴丰厚的数学思想、数学方法等，都是融入课程的重要资源，同时，也能使人类优秀的历史文化通过数学课程得到传承、发扬．

4. 文化融入促进意义的建构

数学历史文化中有许多经典的案例，这些案例能生动地再现数学的建构方式．历史上，数学家把圆等分割为 $2n$（n 相当大）个近似小扇形，再拼成宽为 r 长为 πr 的近似矩形．近似矩形的面积即为圆的面积 πr^2．开普勒把圆面积等分割为无数个近似小三角形的面积和 $\sum\frac{1}{2}\cdot\Delta\cdot r=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2$，即得圆的面积公式．历史文化融入数学能提供多种的建构方式，促进对数学的理解和应用．

“任何与初等数学有关的作者都会感谢无数前人的成果”．首先感谢所有被我们所引用文献的作者，他们的成果让我们萌发出点点创意，孕育了书稿的诞生．多年来，我们得到许许多多的鼓励、支持．其次要感谢西北师范大学的王仲春教授，资深的数学教育专家、前辈，本书作者之一的硕士生

导师.几年来,他老人家一直关心我们在数学文化方面的研究进展,并提供许多帮助.然后要感谢我校、院领导对本研究的重视和支持.还要感谢湛江师范学院数学系多届学生,他们对数学教学中所引用的经典案例给予高度关注、极大兴趣为该研究提供推动力,以及为书稿所做的其他文字工作.特别要感谢曾峥教授对我们研究工作的一贯支持,他在百忙中还仔细审阅书稿,抽空作序,我们无论怎样也无法表达出对他的衷心感谢.最后要感谢湖南师范大学出版社廖小刚编辑,由于他的许多具有创意的建议使该书得以提升,书的出版离不开他辛勤的工作.

全书由张映姜副教授拟定、统筹.由张映姜副教授、陈美英副教授、李晓培教授共同编写.陈美英副教授撰写第二章第一节、第三章第二节,并校对书稿、文字修饰.李晓培教授撰写第五章概率名题、微分积分两节.其余各章节由张映姜副教授完成.书稿的最后定稿由张映姜副教授完成.几年来,我们致力于中小学数学的历史文化研究,但由于数学的历史悠久、文化浑厚,经典名题众多,资料浩如烟海,囿于能力,我们对历史文化的认识还是一鳞半爪,难以充分展现出数学的文化魅力、历史的经典,但能有抛砖引玉之用.期待诸位不吝指教,共同探讨,展示数学的魅力,在数学历史文化的体验中促进数学的传播和发展.

作者于广东湛江

(QQ:1819536938)

目 录

第一章　数的文化:文化的创新

第一节　分数的历史:实用的文化

> 7世纪,欧洲有数学家能计算一道8个分数相加的习题,竟被认为干了件很了不起的大事.当时,若某人陷入绝境了,常用“掉进分数里去了”这一古老的谚语来形容.①

无论过去、现在还是将来,数与形,是人类思维的重要模型,也是人类进行研究的重要对象.分数,数学中极其重要的内容,它见证了人类的历史发展,曾展现了东西方在数认识上的文化差异.分数,体现东方计数的工具、方法的先进,以及对世界数学发展的重大贡献;同时,也承载着西方对分数认识曾经的艰难.分数是数学中内涵丰富的核心概念,是人类重要的文化成果.单分数、连分数、繁分数,分数的奇妙表示、分数的算法等,展现了历史上人类文化的创新,尤其是展现了中国数学曾经的辉煌,卓越的算法遥遥领先于世界;并标志人类思维活动的相关轨迹.分数的历史名题是人类的精神财富,不仅有助于认识分数,而且丰富多彩的数学历史文化,甚至人类高超的数的意识以及数的能力,也揭示了人类与数的紧密联系.分数的历史文化中数的意识、数的观念、分数的思维方式是人类特有的、其他

---

①　谢宇.数学——智慧的源泉[M].南昌:百花洲文艺出版社,2010:29-32.

任何的东西都不可能代替. 的确,“物质或许可以代替,而精神则无法替代”.

1 人类的遗产展现分数的历史悠久

分数源于实践,来自生活. 自从人类有了度量、面临均分的问题后,逐渐产生了除法运算,孕育分数的诞生. 东方分数概念的萌芽离不开“均分”的观念. 原始社会中,人们集体狩猎、分配猎物,有了分的含义,逐渐产生等分观念,并由此产生分数概念. 古希腊“万物皆数”只是产生“整数比”,但分数观念以及分数运算并没有获得与几何同步的发展,古希腊分数体现较多的是数学的理性经验. 分数是人类社会生产、生活的产物,是人类特有的社会文化现象. 古代中国、古巴比伦、古埃及、古印度等先后产生的分数概念往往源于人类有关均分的实践经验. 分数的历史表明,知识源于人类的实践活动,分数是人类思维活动的产物.

在许多民族最古老的文献里,都能找到有关分数的记载. 中国古代,由于测量和均分的实践活动,获得并使用分数. 史料表明,中国最早使用分数,比其他民族早上千多年时间. 在中国,分数的观念历史悠久,分数运用极为普遍,分数的文化内涵极其丰富! 春秋时期的《左传》记载:诸侯的城池,最大不能超过周国的$\frac{1}{3}$,中等的不得超过$\frac{1}{5}$,小的不得超过$\frac{1}{9}$.《史记·项羽本记》中有“汉有天下太半”、“吴韦昭曰:凡数三分有二为太半,有一为少半”.《淮南子》卷六中有“斩艾百姓,殚尽太半”.《后汉书·食货志》(卷二十四)上记载“收泰半之赋”,“师古曰:泰半三分取二”. ①“泰半”即“太半”,则“太半”、“少半”分别表示$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{3}$.

实际问题孕育古埃及分数的产生. 3000 多年前埃及的纸草书中,记载了 10 个人分 9 片面包:每片面包各切下$\frac{1}{10}$,9 人中每个分得$\frac{9}{10}$片面包,$\frac{1}{10}$

---

① 王永建. 数学的起源与发展[M]. 南京:江苏人民出版社,1981:14-15.

片面包共 9 块,给某个人,也得$\frac{9}{10}$片面包.

纸草书中还记载另一个分数问题:一个数量,它的$\frac{2}{3}$,它的$\frac{1}{2}$,它的$\frac{1}{7}$,它的全部,加起来总共是 33. 古埃及的分数观念可能是非常普遍的概念,在生活中使用分数可能也是很平常的事.

阿拉伯地区的分数观念也容易获得展示. 历史上,曾记载了如今家喻户晓的阿拉伯分马遗嘱:11 匹马由三个儿子继承. 大儿子、二儿子、小儿子分别继承遗产的$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$. 正为分马犯愁时,邻居牵来了自己的一匹马,对他们说:现在 12 匹,老大得$\frac{1}{2}$即 6 匹,老二得$\frac{1}{4}$即 3 匹,老三得$\frac{1}{6}$即 2 匹,还剩下 1 匹,我牵回家. ①这些史料均表明,世界各地,许多民族早已存在分数观念,分数运算也是极其普遍的现象.

古希腊的著名数学家丢番图,被誉为代数学的鼻祖. 他的生平事迹没有记载下来,但分数观念明白无误、准确生动地得到展示. 叙述他一生的墓志铭披露出分数的重要信息:"丢番图的一生,幼年占$\frac{1}{6}$,青少年占$\frac{1}{12}$,又过了$\frac{1}{7}$才结婚,5 年之后生子,子先父 4 年而卒,寿为其父之半."这也说明,古希腊也有分数观念,并在生活中有所运用.

2　各种奇特的表示展示分数的精彩

古代分数的表示十分有趣,展示分数的巧妙表示是一件非常有意思的事. 但我们无法追溯分数的形成过程,只可能寻找到分数形成的东鳞西爪,很难得到分数概念较确切、较完整的形成线索. 史料记载,大约三千多年前,古代埃及有了分数的表示,文献记载有用像嘴巴形状的图形表示分数. 大约两千多年前,中国人已用算筹表示分数,若上面摆 1 根小棒,下面摆 4

---

① 谢宇. 数学——智慧的源泉[M]. 北京:百花洲文艺出版社,2010:29-32.

根小棒，这就表示四分之一. 到了 8 世纪，古印度、阿拉伯人发明了十个数字，尤其是人类采用十进位制后大大简化了分数的表示. 他们表示四分之一时，与中国古代时类似，只要上一行写 1，下一行对齐写 4. 1175 年，阿拉伯数学家阿尔·哈萨用一根横线将分子和分母隔开，出现了现代意义上的分数$\frac{1}{4}$. 这根横线被誉为连接母子的“美丽彩带”. ①

到了 13 世纪初，意大利数学家斐波那契把阿拉伯人的分数表示方法传入意大利，也用分子、分母、分数线的现代方法表示分数. 这样，欧洲使用分数的时代逐渐到来. 但要改变欧洲人“害怕分数”的时代，是相当困难的，不是那么容易，要走出“纷繁的运算和忧虑的困境”还需时日. 但毕竟已经开始实行了，因为计数的方式得到改变. 为了排版、印刷，英国数学家德·摩根，创造性地提出使用斜线，即使用斜分数线的方式 a/b 来表示$\frac{a}{b}$. 经过长时间的磨砺，终于谱写出一段分数产生、发展的摇篮曲. 也正是人类的智慧，才有了分数简洁的表示.

3 东方的分数算法，遥遥领先

中国古代的算筹，展示东方的先进算法. 使得中国很早有了引领类似如今分数运算的算法，这种精致的算法极大地促进了数学的发展，同时数学的实用性推进数学进步，展现人类高超的智慧和奇妙的想象力. 中国古代一系列科学的、完整的分数算法在《九章算术》中闪耀着，如合分术、减分术、乘分术、经分术、课分术、平分术等众多算法.

例如，合分术：母互乘子，并以为实，母相乘为法，实如法而一. 其中除数称为“法”，被除数称为“实”，被除数为除数所除称为“实如法而一”. 用现在的数学符号来表达是：

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}+\frac{ad}{ac}=\frac{bc+ad}{ac}.$$

---

① 徐品方，张红. 数学符号史[M]. 北京：科学出版社，2006：140.

减分术:母互乘子,以少减多,余为实,母相乘为法,实如法而一.其中"以少减多"与我们现在的理解相反,他的意思是用较大的数减去较小的数.用现在的数学符号来表达是:

$$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}-\frac{ad}{ac}=\frac{bc-ad}{ac}.$$

乘分术:母相乘为法,子相乘为实,实如法而一.用现在的数学符号来表达是:

$$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}.$$

经分术:法分母乘实(为实),实分母乘法(为法,实为法而一).其中"法分母乘实"的意思是用除式的分母乘以被除式的分子,"实分母乘法"的意思是被除式的分母乘以除式的分子,把前者所得的结果作为分子,后者的结果作为分母,再相除即得.用现在的数学符号来表达是:

$$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}=\frac{bc}{ad}.$$

分数的约分和通分在《九章算术》"方田"章中也有生动的记录.分数的约分和通分能方便分数运算.《九章算术》中所记载的"可半者半之".《张邱建算经》的序中说:"耦者半之",前面两句话的意思是说,观察分数,如果分子、分母都是偶数,就各取其半.如《夏侯阳算经》卷(上)中说:"五者倍而折之."意思是说:如果分子、分母的末位数字都是5,那么就可以对分子、分母分别用2乘以5后再用10除.如:

$$\frac{35}{55}=\frac{35\times2}{55\times2}=\frac{70}{110}=\frac{7}{11}.$$

《九章算术》中的约分程序是:"不可半者,副置分母、子之数,以少减多,更相减损,求其等也,以等数约之."意思是说:如果不是偶数,那么用辗转相减的方法,从较大的数减去较小的数,最后得到一个余数和减数相等,这就是所求的最大公约数,再互相约掉.

巴比伦人做整数除以整数的运算,由于除以一个整数就相当于乘以这个数的倒数,这就牵扯到分数.

例如：把700块面包分发给四人，第一人占$\frac{2}{3}$，第二人占$\frac{1}{2}$，第三人占$\frac{1}{3}$，第四人占$\frac{1}{4}$. 当时埃莫斯给出的解法是：把$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$加起来，得$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$. 以$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$除1，得$\frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$. 现求700的$\frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$，得400，如图1－1，从文字的表达中，我们看不出计算的奇特性在哪. 埃及当时的"以$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$除1"和"700的$\frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$"计算方法，很容易体会到它们的奇特美，如图1－2：

除法运算：

	1	$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$	除数
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$	*
	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}\ \frac{1}{28}\ \frac{1}{56}$	*
商	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$	1	被除数

图1－1

乘法运算：

	1	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$	乘数
	700	350+50	*
乘数	700	400	积

图1－2

不可否认的是，古埃及的算术还是非常麻烦、繁琐的，它阻碍了算术和代数的发展. 面对分数中较复杂的计算，他们并未停滞不前，而是向前进. 他们在代数上还是取得了相当程度的进步. 很遗憾的是，他们还不知道中

国的分数的通分、约分和分数的四则运算.

4　单分数,人类数学的奇葩

分子是 1(单位)、分母是某一自然数的分数,即历史上经典的单位分数,也叫埃及分数.《莱因德纸草书》中关于$\frac{2}{n}$(n 为 5 到 101 的奇数)的分数表中提出了单分数以及与普通分数间转化.古埃及是如何由单分数得到普通分数的?即先把分数拆成分子为 2 和 1 的分数之和,再利用表把分子为 2 的分数表示成单分数之和,最后得到分母相异的单分数之和.例如,$\frac{7}{29}$表示若干单分数之和:

$$\frac{7}{29}=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{232}.$$

单分数的奇妙构造引起了不少数学家的兴趣,意大利的数学家斐波那契也创造出自己的一套单分数构造方法.他选取 12、24、36、48、60 或者其他任何数字,去乘除需要分解的分数,但这个选取的数字必须比分母的一半大,比分母的 2 倍小,这些数字最好含有更多因子,以增加与分子约简成 1 的机会,使得分数尽快地化为单分数.例如,

$$\frac{17}{29}=\frac{1}{24}\times\left(24\times\frac{17}{29}\right)=\frac{1}{24}\times\left(14+\frac{2}{29}\right)=\frac{14}{24}+\frac{1}{24}\times\frac{2}{29},$$

再把$\frac{14}{24}$化成单分数,得到

$$\frac{14}{24}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\text{或者}\frac{14}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3},\text{又}\ \frac{1}{24}\times\frac{2}{29}=\frac{1}{348},$$

因此得到

$$\frac{17}{29}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{348}\text{或者}\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{348}.$$

斐波那契的算法非常的巧妙.古巴比伦人也编制了分数表,只不过是用六十进位的分数来表示单分数,如

$\frac{1}{54}=\frac{1}{60}+\frac{6}{60^2}+\frac{40}{60^3}$. ①

5 “掉进分数里”,西方人曾经的烦恼

曾经的西方,重视人类理性,忽视数学与生活实践间的联系,也由于缺乏科学的数的表示方法,对分数的认识不仅较迟而且还相当肤浅.古希腊时期,尽管有了“整数之比”的内涵,但对分数仍然迷惑不解.在西方称分数为破碎数(fraction).由于采用罗马符号表示数,如3787写成MMM DCCLXXXVII,整数记数已经够笨拙了,分数的表示之困难可能让人无法想象.1735年,英国有本教科书上说道:“部分学生看到分数时,灰心到不愿学习,他们叫嚷说:‘不要再往下讲了!’”②可见早期西方人对分数运算的恐惧心态。早时期的西方人万不得已才使用分数.由于缺乏简洁的印度阿拉伯数字和科学的十进位制计数法,古罗马数的表示法相当繁琐,这直接影响西方对数的认识和理解,对分数的表示和计算影响非常大.7世纪,欧洲有个数学家算出了一道8个分数相加的习题,竟被认为是干了一件很了不起的大事.而且在当时,德国人形容某个人陷入绝境时,就常常引用一句古老的谚语,说他“掉进分数里去了”.③随着印度、阿拉伯10个数字引入以及十进位制科学运用,欧洲人对分数的认识才有了一些改观.13世纪初,斐波那契把阿拉伯人使用分数线表示分数的写法传入意大利,这样欧洲也运用现代意义上的分数进行运算,才慢慢走出纷繁的分数运算和忧虑的困境.

西方人对分数运算的写法有意思.当时,德国人鲁道夫(约1500—1545)计算$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$时,运算的书写方式如图1-3,公分母12写在最下面,计算得到的分子8、9写在上面,相加即得两个分数的$\frac{17}{12}$.减法的书写方式、思

① 乐嗣康.数学与数学家的故事[M].石家庄:河北教育出版社,1987:22-23.
② 徐品方,张红.数学符号史[M].北京:科学出版社,2006:140.
③ 谢宇.数学——智慧的源泉[M].南昌:百花洲文艺出版社,2010:29-32.

路与加法一样.

$$\begin{array}{cc} 8 & 9 \\ \hline \frac{2}{3} + & \frac{3}{4} \\ \hline 12 & \end{array}$$

图 1－3

$$\begin{array}{r} 23 \\ \frac{1}{2}11 \\ 67 \\ \frac{1}{3}22 \\ \text{结果}\ \frac{5}{6}256 \end{array}$$

图 1－4

斐波那契在分数带分数相乘时,先转化为假分数,计算结果又化为带分数.例如,计算 $11\frac{1}{2}\times 22\frac{1}{3}$.他把大的数写在小的数下面,中间空一行.带分数全化为假分数,其分子写在带分数上面,如图 1－4. 23 写在$\frac{1}{2}11$上面,67 写在$\frac{1}{3}22$上面.然后把二分之二十三乘以三分之六十七,得六分之一千五百四十一,化为带分为$\frac{5}{6}256$,就是乘法运算的结果.

第二节　负数的认可:文化的共识

正负术:"同名相除,异名相益.正无入负之,负无入正之.其异名相除,同名相益.正无入正之,负无入负之."

——摘自《九章算术》

负数是数学中非常重要的,也是一个难理解的数学概念,许多人常常长时间对负数感到困惑.负数的历史悠久,但人类对负数的深刻认识却极

为曲折坎坷. 西方排斥负数,但东方却乐意接纳负数,可以说,负数是中国古代实用数学中常见的概念. 但如今仍有为数不少的数学人,尤其是中国人,对"中国是负数的故乡"不知实情,对负数的历史由来及有关常识不甚了解,这是令人费解和难以置信的. 曾有位数学家的心声道出其中的无奈,"学习我的研究成果,却不知晓我的姓名,世上没有比这更令人伤心的事了."《数学精英》的作者贝尔对此也无不遗憾:"强调现代数学思想,极少提及迈开第一步、也许是最困难一步的先驱者们,对我们的先辈可能是不公平的."主要源于古老东方的负数,有着非常现实的材料,它展现着东方数学的博大精深. 早期东方数学家对负数有成熟认识,对比西方数学家排斥负数,更让我们感受到东、西方数学思维的奇特差异. 从负数的产生、发展到获得大家的认可经历的漫长的发展历程中,我们能领悟到负数的悠久历史和丰富的文化内涵,体验到数学的魅力.

1 负数的历史悠久

许多知识历史悠久,负数也不例外. 源于人类实践活动、生活经验的负数,蕴涵中国古代数学的博大精深,渗透出实用数学的魅力. 古代资料表明,距今几千年前,我们的祖先已有了负数观念. 中国古代数学的经典《九章算术》,是实用数学的代表. 对于《九章算术》成书时间,数学史家李迪研究认为,《九章算术》系统总结了战国、秦、汉时期实用数学的成就,并认为,成书时间是东汉初年,即1世纪前半期,出于刘歆之手. ①《九章算术》中记载的方程术、正负术、正负开方术等中涉及许多负数,方程术中给出了负数根,这是世界上有关负根最早的记载. 公元263年,魏晋时期的数学家刘徽的《九章算术》注中第八卷(方程)有"今两算得失相反,要令正负以名之",即定义了正、负数,并认为,"正算赤,负算黑,否则以邪正为异". 即用红色的算筹表示正数,黑色算筹表示负数;或者,以正摆的算筹表示正数,斜摆的算筹表示负数. 第八题术曰:如方程,置牛二,羊五正,猪十三负,余钱数

---

① 吴文俊. 中国数学史大系(2)[M]. 北京:北京师范大学出版社,1998:14-15.

正;次置牛三正,羊九负,猪三正;次置牛五负,羊六正,猪八正,不足钱负.以正负术入之.刘徽注释收钱的数目为正,付钱的数目为负,余钱为正,不足钱为负.①在粮谷的计算中,“益实”是正,“损实”为负.从《九章算术》来看,正、负数已是很寻常的数学知识了.

这主要因为,古时候中国的生产、生活、商业等实践活动孕育了负数观念,并作为解决收入、负债等实际问题的重要方式.当时的东方,已经有了买入卖出、盈余亏欠等实践活动,为正负数产生提供丰沛的文化土壤.当时,有了卖出为正、买入为负,以盈余为正、亏欠为负等正负数的实践认识.战国时期的李悝(公元零年前后)在《法经》中已有使用负数的案例:“衣五人终岁用二千五百不足四百五十.”意思是说,5 个人一年开支 1500 钱,差 450 钱.东汉的班固(32—92)撰写了《汉书・律历志》(下)中已有这样的表述:“强,正;弱,负也.其强弱相减,同名相去,异名从之.从强进少为弱,从弱退少而强.”我们不能不惊叹当时对正、负数的深刻认识.甘肃居延出土的汉简中记载有大量的负算,如“相除以负一百二十四算”、“负二千二百四十五算”、“负四算,得七算,相除得三算”.负数表示缺少、亏空之意.负数概念是人类实践活动的结果,其历史渊源流长.毋庸置疑,“中国是负数的故乡”.

古印度,他们也较早地认识和使用负数,并烙上了鲜明的生活经验痕迹.大约 7 世纪,古印度使用负数表示缺少、亏空.《婆罗摩历算书》记载,“财产”记为正数,“债务”记为负数.负数的历史轨迹表明,实用数学使东方较早的有了负数概念,开创了负数的先河.

阿拉伯人对负数的认识较晚,记载也少.艾布・瓦发的文献中记载负数概念.他说,由于“美妙的东西”负数的加入,使得法则在任何情形下都保持了“秩序与和谐”.欧洲数学家对负数的认识、接受是相当相当的晚.十四五世纪,负数经阿拉伯传入欧洲.到了十五六世纪才被部分数学家认识,要

① 赵籍丰.中国古代数学[M].北京:北京科学技术出版社,1995:19.

获得一般人的认可,那是 19 世纪后的事了.①

2　简洁的负数记号,艰困的共识

负数经历各种记法展现了人类的睿智、思维的创新,体现了人类对数学的深刻认识. 简洁的负数记号,更是几千年人类思维活动的结果. 中国古代计数工具算筹也能体现数的正负,红黑算筹分别表示正负数. 刘徽《九章算术》有“正算赤,负算黑,否则以邪正为异”. 秦九韶《数学九章》(1247) 中也有“负算画黑, 正算画朱”. ②李冶的《测圆海镜》(1248)中还可以见到“以邪正为异”负数表示法. 到了宋元时代,朱世杰的《算学启蒙》(1299)中有负数的记法:在这数的最右的一个算筹上加以斜杠表示负,如 𝍢 𝍩 𝍣 和 𝍧 𝍭 0 就分别表示－324 和－860. 程大位《算法统宗》(1492) 卷十一方程在开篇就注明“正者正数, 负者欠数”, 注明算法时在负数旁标记“负”字. 中国明代、清代记数时仿此记负数. 以红、黑两色数码分别正、负数,或在表示负数的筹码下书一“益”字,或在最后一位有效数字上添一斜杠表示负数. 史料中记载的中国的负数历史悠久,令世人为之惊叹. 负数的表示方式展示人类思维的独特,也生动展示了独具匠心的中国古代数学.

印度,负数表示也别具一格. 婆罗摩笈多在数的上面点上一点或画上一个小圆圈,用以表示这个负数,如 $\dot{3}$ 或 $\mathring{3}$ 表示－3. 如果负数是个多位数,如 61・33 表示－6133,标上记号“・”表示负数. 古印度数学中,小点或小圆圈表示零,似乎表示零下之数为负的意思. ③古印度数学家或许就是这样理解负数. 在数的上面圈上一个 0 有“负数比零小”的寓意,真有些妙不可言. 8－10 世纪,印度一部名叫“巴克沙利”手稿,还用类似现在的加号“＋”表示负数, 但符号“＋”写在数后,例如 7＋ 表示－7. 但这种表示方法只是昙花一现.

---

① 郭彬彩. 数学史与数学家[M]. 西安:西安地图出版社,2002:18.

② 王青建. 古代的负数记法[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版),1998(3):177-181.

③ 梁宗巨. 世界数学史简编 [M]. 沈阳:辽宁人民出版社,1980:143.

欧洲部分学者用符号或用字母表示负数. 斐波那契(1170—1230)表示"欠款"的负数用 minus 表示,他在《算盘术》(1202)中用单词 plus 和 minus 表示过剩和不足. 之后,许多数学家用"p"、"m"或在这两个字母上加一波浪线表示正、负数. 卡当(1501—1576)用 m:15 表示−15, 其中 m: 就是当时的减号, 同时作为负数的符号. 在 17—18 世纪负数逐渐获得认可,表示方法也逐渐增多.

19 世纪末,尽管负数在欧洲受到排斥、冷落,欧洲人没有意识负数的数学意义,但毕竟几千年过去了,接受、使用负数的人慢慢多起来. 有人开始使用符号"−"表示负数,与在数的上面圈上一个 0 有异曲同工之妙. 1854 年,英国传教士伟烈亚力一本中文的《数学启蒙》中采用负数符号"−". 1917 年,美国数学家亨廷顿用符号"−"表示负数,如…,−3,−2,−1,0,+1,+2,+3,….

20 世纪初,负数简洁的记法"−"最终获得数学家以及各界人士的一致认可. 负数现代记号是众多数学实践活动的精彩结果,负数的形成过程展示人类丰富多彩的情感生活. 从负数观念的出现到负数的现代表示经历了两千多年. 这两千多年是东、西方数学交流的两千多年,是人类文化传承和发展的两千多年,也是"跌跌撞撞"形成负数概念的两千多年.

3　经典的东方算法

早在西汉时期(公元前 202—公元 9),中国人已用赤筹、黑筹开始正数、负数的运算. 当一数与另一数相减,以少减多和以多减少同时出现时,在算筹操作中就有了"两算得失相反"的描述. 东汉末(25—220),刘洪撰写"乾象历法"(206),用正、负数进行运算. 他说,正、负数相并,同名相从,异名相消;共相减也,同名相消,异名相从,无对互之. 他的"无对互之"其实就是"正无入负之,负无入正之."①《九章算术》第八卷"方程章"的第三题解算体

① [美]M. Kline. 古今数学思想(2)[M]. 张理京,等,译. 上海:上海科学技术出版社,1979:293.

现正负数的加减运算规则，即正负术："同名相除，异名相益. 正无入负之，负无入正之. 其异名相除，同名相益. 正无入正之，负无入负之". 同名指的是同号，异名指的是异号，这里的相除指的是相减，相益指可加。正负术其实是有理数的加、减法法则。具体地，

有理数的减法法则：

$(\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b)$，

$(\pm a)-(\mp b)=\pm(a+b)$，

$0-(\pm a)=\mp a$.

有理数的加法法则：

$(\pm a)+(\mp b)=\pm(a-b)$，

$(\pm a)+(\pm b)=\pm(a+b)$，

$0+(\pm a)=\pm a$.

用现代符号表示更简单了. ①

刘徽(约 225—295)在《九章算术》注中说："无入为无对也"，并解释了"无入"的意思：以零为被减数的情形. 刘徽由此概括出零、负数参与运算的法则："零加正数为正数，零加负数为负数"；"零减正数为负数，零减负数为正数".

朱世杰提出了"同名相乘为正，异名相乘为负；同名相除所得为正，异名相除所得为负"，即有理数乘除法规则.

婆罗摩笈多的法则本质上与《九章算术》中的相同，但增加了

$(+a)+(-a)=0, 0+0=0, (\pm a)-0=\pm a$.

关于正负数的乘、除法则，婆罗摩笈多指出："两个'财产'或两个'债务'的乘积是'财产'、'财产'乘'债务'是'债务'；除法相同."也就是，"正负数相乘得负，两负数或两正数相乘皆得正，正数除以正数，或负数除以负数得正，但正数除以负数，或负数除以正数结果都是负的". 印度人对负数的自由运用，不仅推广了算术的范围，也为代数学的发展开辟了道路. 例如，

---

① 谷超豪. 数学词典[M]. 上海：上海辞书出版社，1992：658.

12 世纪的婆什迦罗(1114—1185)就对负数有了更全面的认识. 他的著作中也把负数称为“负债”或“不足”,给出了负数的平方和开方运算法则[①]:“正数、负数的平方,常为正数;正数的平方根有两个,一正一负;负数没有平方根,因为它不是一个平方数.”这些观点为西方负数参与代数运算提供了可借鉴的经验.

4　负数困惑着西方数学家

西方早期的数学家几乎没有使用负数的生活经验,受负数的困惑长达两千多年. 因而,长时间排斥负数,许多人认为负数不是“数”. 一些著名的数学家还认为,负数极其“荒谬”. 1484 年,法国的舒开对二次方程的负根给予舍弃. 笛卡尔认为,负数是“不合理的数”. 法国数学家韦达在代数方面作出了巨大贡献,但也尽力避免引入负数,并把方程的负数根统统舍弃.

1759 年,英国数学家马塞雷在《专论在代数中使用负号》一文中曾给人支招,如何避开负数,特别是避开方程的负根. 他认为,负根“只会把方程的整个理论搞糊涂,而且把一些就其本质来说是出奇地明显简单的东西搞得晦涩难懂、玄妙莫测……”

到了 1831 年,英国著名代数学家德·摩根还认为负数是虚构的,并用反例说明负数的“荒谬”之极:父亲 56 岁,其子 29 岁. 问何时父亲年龄将是儿子的二倍?

列方程 $56+x=2(29+x)$,解得 $x=-2$.

他指出,此解“荒唐”:1 表示有一个,2 表示有两个,0 表示什么都没有.“什么都没有”已经最少了,而负数居然比零还小. 这怎么可能呢? 德·摩根在《论数学研究的问题和困难》中把负根和复根进行比较,认为 a 和 $-b$ 在问题的解中出现就会产生矛盾和谬误,并认为二者是虚构和不可思议的. 这还真让我们啼笑皆非,无可奈何.

著名数学家帕斯卡也不承认负数,并认为,从 0 减去 4 纯粹是胡说! 帕

---

① 梁宗巨. 世界数学史简编[M]. 沈阳:辽宁人民出版社,1980:143.

斯卡的朋友阿润德提出一个特别的悖论：较小的数与较大的数的比等于较大数与较小数的比[①]，即

$$(-1):1=1:(-1).$$

他认为，这是极其荒谬的，并以此达到反对负数的目的. 19 世纪，英国数学家弗伦德拒绝承认负数，并认为"只有那些喜欢信口开河、厌恶严肃思维的人"才"谈论比没有还要小的数".

人类的理性毕竟会呼唤数学的复苏. 1544 年，德国的斯蒂菲尔承认负数，并把负数定义为比任何(正)数都小的数. 到了 1637 年，法国数学家笛卡尔用数轴上的点表示数，给出了负数的几何解释. 阿吉得认为负数是正数的一个扩张，利用负数扩张可得到实数系. 19 世纪，德国数学家维尔斯特拉斯等人认为，负数作为(实)数系的一个重要组成部分，由此建立实数理论. 在西方，负数最终被接受，并广泛得到承认. 达朗贝尔在《百科全书》中对负数下了一个很有意思的结论，反映出许多数学家对负数的认识："对负数进行运算的代数法则，任何一个人都是赞同的，并认为是正确的，不管我们对这些量有什么看法". 西方对代数运算封闭的认识，导致许多人产生"负数最早源于西方"的错觉. "经验来自东方，规则来自西方"，这种表述是对实用数学的确认，是对数学的来源某种意义上的一种肯定. 除"演绎规则"无可争辩地源于西方外，别的规则却绝大多数并不一定是出自西方. 史料早已证明，许多诸如"正负开方术算法"等经典的数学规则来自东方，尤其是源于中国古代.

① [美]M. Kline. 古今数学思想(2)[M]. 张理京，等，译. 上海：上海科学技术出版社，1979：293.

第三节　无理数概念:文化的困惑

求其微数.微数无名者以为分子,其一退以十为母,其再退以百为母.退之弥下,其分弥细,则朱幂虽有所弃之数,不足言之也——开方术.

——摘自刘徽《九章算术注》

无理数是实数集中重要的组成部分.无理数历史坎坷、过程曲折.无理数的产生、发展见证人类数学发展的历程,体现数学家对无理数思考的逐步深化.19世纪,柯西、魏尔斯特拉斯、戴德金等大数学家终于认清无理数的特征,形成无理数概念,建立实数理论.无理数概念是数的概念一次大的突破.数学家对无理数两千多年的思考表明,无理数的确是中学数学中的难点.《九章算术》的开方术确定无理数形成,古希腊关于无理数的经典内容也充分展示人类文化的深刻内涵.黄金比欣赏让人类有了审美体验,玩赏圆周率能感悟人类的无穷智慧,以及人类对数学永恒的追求和不变的热情.无理数的发展历史过程中处处能展现人类的数学思维的高超水平.

1　东方的"开方术"

感受无理数与开方间深刻的渊源,追溯无理数的历史文化,欣赏数学魅力.如,由 $x^2=a(a\geqslant 0)$ 得到 $x=\pm\sqrt{a}$,a 开方开不尽时得到无理数 $\sqrt{a}$,从而引出无理数概念.开方开不尽时,让当时许多数学家非常困惑.但中国古代数学家对无理数有独到的认识,对无理数有特别的处理方法.《九章算术》是世界经典名著,其中的开方术说道:"若开不尽者,为不可开,当以面命之.""面"即是开方不尽的无理数.刘徽在《九章算术注》中指出如何以面命之的方法:"求其微数.微数无名者以为分子,其一退以十为母,其再退以百为母.退之弥下,其分弥细,则朱幂虽有所弃之数,不足言之也."也就是

用有理数逼近无理数.用符号表示无理数就是

$$\sqrt{a}=\sqrt{\alpha^2+r}=\alpha+\frac{r_1}{10}+\frac{r_2}{10^2}+\cdots+\frac{r_n}{10^n}+\cdots.$$

对一正数使用开方术时“开方开不尽的数”即可得到无理数.这样,不仅突出无理数独有的特征,而且还提供得到无理数的常用方法.

与中国古代一样,古巴比伦人、古印度人也认识了无理数,同样用有理数去逼近无理数.阿拉伯地区数学家对无理数也有深刻的认识.阿拉伯学者阿布·卡米尔在他的著作《代数学》中提供许多无理系数的方程案例,并发现了无理数的四则运算法则:

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}},\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab},\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

这是人类对无理数共同的认识,也是人类又一幕精彩的文化景观.

2 “万物皆数”:经典的悖论

中国古代数学家对无理数的早期认识源于开方术,古希腊对它的认识始于勾股定理,困惑于“万物皆数”,即经典的数学悖论.公元前500年,古希腊勾股定理用于直角边是1的等腰直角三角形,于是斜边长等于$\sqrt{2}$.意想不到的是,希帕索斯竟然发现并证明$\sqrt{2}$不是一个(有理)数.石破天惊!与古希腊“万物皆数(有理数)”产生矛盾.希帕索斯还是忘了毕达哥拉斯学派的忠告,“天机不可泄露”,终因天机泄露而死.真是祸从口出.无理数的产生竟然会带来如此严重的后果!无理数的悖论这一经典问题一直延续到19世纪.有关无理数的逸闻丰富了我们的数学体验.

无理数如何处理也成为古希腊数学家非常头痛的事情.数学家欧多克斯提出了比与比例理论,把无理数当作一种量进行巧妙地处理,后来被欧几里得收入世界数学经典《几何原本》第五卷.于是,关于无理数的第五卷也成为数学史上的经典,传为美谈.后来许多数学家对欧多克斯处理无理数的方式给予高度评价.著名数学家波尔察诺对巧妙的比例理论交口称赞.他曾讲述自己的一段趣闻,比和比例理论的精彩让他排遣疾病与痛苦,

精神振奋. 每当朋友生病时，他总会力荐读读《几何原本》第五卷，认定它必是一剂排除痛苦的灵丹妙药.

让人意想不到的还有，古希腊的勾股定理孕育着无理数的产生. 古代数学家利用直角边是 1 的等腰直角三角形斜边$\sqrt{2}$再为直角边，另作一直角边为 1，得到直角三角形，其斜边长为$\sqrt{3}$；再以斜边为直角边，另一直角边为 1，作直角三角形，得到斜边为$\sqrt{4}$……如此下去，就得到边长为$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$……线段，如图 1－5，得到类似螺线的螺旋图形. [1]螺旋图形精致、美观、大方、有序，给人以审美的体验、愉悦的感受. 可见，无理数放在历史文化脉络中更有生命力和感染力.

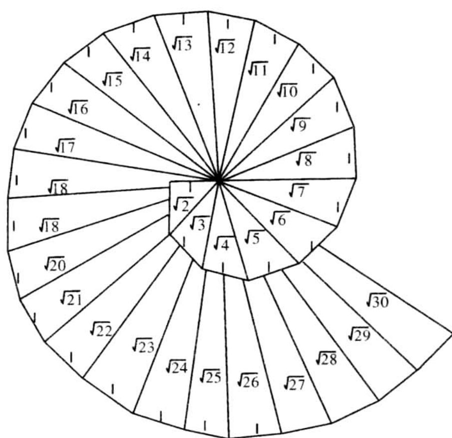


图 1－5

3　最早的审美：数学黄金比

人类历史上，出现了最早的审美体验——数学黄金比. 古希腊的"黄金分割比"也丰富了无理数的内涵，展示数学美. 开普勒说，几何学有两大财富，毕达哥拉斯定理好比金子，黄金分割比堪称珠玉. 如图 1－6，点 C 为黄金分割点，则有 $AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\approx 0.618a$，其中 $AB=a$. 意大利画家达 · 芬奇对"黄金分割比"情有独钟，魂牵梦萦. 他的许多作品都遵循黄金分割原则.

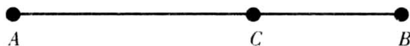


图 1－6

世界上最早接触黄金分割的是毕达哥拉斯学派. 好多图形都与黄金分

---

① 邹瑾，等. 开心数学[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2003：17.

割有关系，这些图形都非常匀称、饱满、圆润、精致，赏心悦目.

(1)黄金三角形

在古希腊，有黄金三角形，即腰与底之比是黄金比的等腰三角形，这样的三角形比例适中，赏心悦目. 在一黄金三角形中以底为腰再作一黄金三角形，依此而作，得到一连串的黄金三角形，于是形成黄金三角形套，如图1－7.

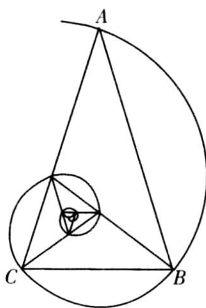


图 1－7

(2)黄金矩形

黄金矩形，即长、宽之比为黄金数的矩形. 1525 年，德国著名画家、雕刻家丢勒认为在所有矩形中，黄金矩形最为美观. 19 世纪中叶，德国心理学家费希纳，举办了一次由他精心制作的矩形展览会. 要求参观者选出最美矩形. 结果有四种矩形被选为最美矩形. 有趣的是这四种矩形的长与宽的比值都接近于 0.618，这说明黄金矩形造型均衡、和谐优美.

数学家对黄金矩形的分割很感兴趣. 他们将一个黄金矩形分割一正方形后，剩下又是黄金矩形，再分割一正方形，剩下的还是黄金矩形. 在黄金矩形的各个正方形里，作$\frac{1}{4}$个圆弧，如图 1－8. 这些圆弧便形成一条曲线，称黄金螺旋线.

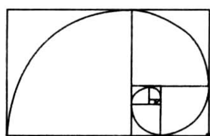


图 1－8

(3)黄金椭圆

黄金椭圆，即短轴、长轴之比为黄金比的椭圆，它是历史上人们最喜爱的椭圆，如图 1－9，圆润、饱满、对称. 它的面积与以它的焦距为直径的圆的面积相等，其离心率的平方也是黄金数.

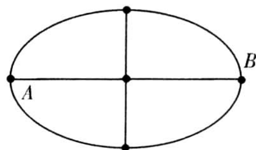


图 1－9

(4)黄金双曲线

实半轴、虚半轴之比为黄金比的双曲线，其离心率的倒数也是黄金数.

(5)正五角星

秘密团体毕达哥拉斯学派用符合黄金分割正五角星作为学派会章，以此防范外人的侵入.

黄金矩形、黄金三角形、黄金椭圆、黄金双曲线等离不开黄金比 0.618……这些黄金图形和谐、优美，精妙绝伦. 一些名画、雕塑还有摄影，大多遵守 0.618……规则，每一个构图都有效展示了黄金分割之美. 如舞台上存在黄金分割点，在此点站立体态美观大方，音响最佳；古代的不少建筑物，其高与宽的比也等于黄金比，兔子的繁殖也遵照黄金分割. 黄金比是人类社会、自然界普遍遵守的审美规则. 黄金分割的审美意义由此可见一斑.

4　人类乐此不疲的圆周率

探讨圆周率的历史，体验 π 的趣味. 数学中最重要、最神奇的无理数是 π，也是人类最早认识特殊无理数. 人类赋予圆周率 π 许多的人文属性. 人类对无理数 π 认识很早.

早期圆周率近似值取 3；公元前 2000 年，巴比伦人认为 $\pi=3\frac{1}{8}=3.125$. 同期的古埃及人认为，直径为 9 的圆与边长为 8 的正方形周长相当，即 $\pi=\frac{256}{81}=3.1604$.

圆周率与中国古代数学家有历史渊源. 公元 200 年间，数学家刘徽在《九章算术》中用极限方式——割圆术，提供了求圆周率 π 近似值的数学方法. 公元 5 世纪，数学家祖冲之用割圆术估计 π 的近似值的范围：

$$3.1415926<\pi<3.1415927.$$

π 的近似值 3.1415926 被尊称为“祖率”. 并将月球背面环形山命名为“祖冲之环形山”，以此纪念祖冲之的杰出贡献.

背圆周率是中国学生曾经要求的功课. 要求背到小数点后面 22 位数字，这也不容易，但是一绝顶聪明的学生撰了首顺口溜，把圆周率与老师上山喝酒的情景联系起来：“山巅一寺一壶酒（3.14159），尔乐苦煞吾（26535），把酒吃（897），酒杀尔（932），杀不死（384），乐尔乐（626）.”这样，

背圆周率背到小数点后22位成为一件极为容易的事情.巧妙的主意,绝佳的主题.对圆周率枯燥的23个数字,他们利用谐音把故事的地点、活动、情绪等悉数说出.这首圆周率的顺口溜有创意!可谓是经典之作!上口、押韵,妙趣横生!

古希腊人对圆也早已认识.他们发现,不管圆有多大,圆的周长与直径的比值总是定值,这是圆不变的规律,称之为圆周率.希腊人用圆的单词第一个字母π表示圆周率.公元前约250年,古希腊的阿基米德通过圆内接和外切多边形逼近圆周,得到π的上、下界:

$$\frac{223}{7}<\pi<\frac{22}{7}.$$

确定无理数π小数点后面的数字成为许多人的爱好.人类历史上四个最伟大的数学家之一,微积分的创始人牛顿也计算圆周率的数字.他对自己只算到小数点后15位不满意.他曾腼腆地对友人说,不好意思,这是闲暇无事时算了下π的数字.牛顿闲暇时算到圆周率小数点后15位.如今,这也成为衡量当今世界计算机功能是否强大的检验标准."历史上一个国家所算得的圆周率的准确程度,可以作为衡量这个国家当时数学发展水平的指标",德国数学史家康托说.随着研究方法的不断更新,从实验法、几何法到分析法不断发展,人类对圆周率π研究越来越深入,准确度也越来越高.数学家对理性的追求正是人类进行数学研究、促进数学发展的永恒动力.数学家研究圆周率、数学爱好者玩赏圆周率、许多人背圆周率,使得圆周率赋予了许多人文的属性,引来诸多忍俊不禁的逸闻.这些让人兴奋不已,永久保留在人们的记忆深处.

圆周率π像一座迷宫,让人们流连忘返;像一首朦胧的诗,一曲悠扬的乐章,又像一座入云的高山,让人们遐想,陶醉,更让人们奋进,去攀登不息!

5 神秘的无理数e

无理数e的确非常神秘.它有何来由?它的值是如何确定的?诸如此

类的问题，对现代的许多人而言，很有可能不知道. 最先使用“e”这个符号的是瑞士数学家欧拉. e是作为数列的极限而出现，即

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

其近似值为2.71828……是一个无理数，也是一个超越数，并作为自然对数的底. 自然对数e是工程、数学等自然学科的最重要的数字之一，甚至超过圆周率π. e在科学技术中用得非常广泛，一般不使用以10为底数的对数而使用以e为底数，这样许多式子都能得到简化，用它是最“自然”的，所以叫“自然对数”. 自然对数的底e一直困扰着我们. e中曾隐含着某商人的贪婪. e与商人借钱的利息有关，是有生活原型的，但我们知道甚少：

过去，有个商人向财主借钱，财主的条件是每借1元，一年后利息是1元，即连本带利还2元，年利率100%. 利息好多喔！财主好高兴. 财主想，半年的利率为50%，利息是1.5元，一年后还$1.5^2=2.25$元. 半年结一次账，利息比原来要多. 财主又想，如果一年结3次，4次，…，365次，…，岂不发财了？

财主算了算，结算3次，利率为$\frac{1}{3}$，1元钱一年到期的本利和是：

$$(1+\frac{1}{3})^3=2.37037\cdots\cdots$$

结算4次，1元钱到一年时还

$$(1+\frac{1}{4})^4=2.44140\cdots\cdots$$

财主还想，一年结算1000次，其利息是$(1+\frac{1}{1000})^{1000}$.

这么大的数，年终肯定发财了. 可是，财主算了算，一元钱结账1000次，年终还的金额只有：

$$(1+\frac{1}{1000})^{1000}=2.71692\cdots\cdots(\text{元}).$$

这令财主大失所望. 他以为，结账次数越多，利息也就增长得越快. 财

主根本不知道，$(1+\frac{1}{n})^n$ 的值是随 n 的增大而增大，但增加的数额极其缓慢；并且，不管结算多少次，连本带利的总和不可能突破一个上限. 数学家欧拉把 $(1+\frac{1}{n})^n$ 极限记作 e，e＝2.71828……即自然对数的底.

6 五朵金花与神奇的欧拉公式

无理数 π、e 与虚数单位 i 和简单的 1、0 这五个重要常数被戏称为“五朵金花”. 无理数 π、e 与 i、1、0 不同类，通过公式把五朵金花联在一块是有些“异想天开”. 可大数学家欧拉真的把 π、e 与 i、1、0 联系起来，毫无“姻缘”的“五朵金花”通过著名的公式 $e^{i\pi}+1=0$“亲密地”结合在一块，“联姻”方式如此简洁、明快，真的具有丰富的想象力. 让人不可思议！无穷不循环的小数与简单的数 1、0 以及虚数单位 i 构成一恒等式，打破了无理数、虚数间的隔绝. 该公式被德国数学家克莱茵称为“整个数学中最卓越的公式之一”，在数学中最能体现人类想象力的一个公式，它是世界上最短的也是最有名的公式……无论是神秘主义者、科学家、哲学家、数学家，都能从公式中感受到数学的魅力.

第四节 复数的历史：创新的文化

只要不把 ＋1，－1，$\sqrt{-1}$ 叫做正一、负一和虚一，而称之曰向前一、反向一和侧向一，那么这层朦胧而神奇的色彩即可消失.①

——高斯

① 袁小明. 数学史话[M]. 济南：山东教育出版社，1985：118.

许多数学活动孕育着数学创新，复数的创立折射数学创新的规律. 数学理论的创建首先是观念上的突破. 荒唐的虚数概念建立是人类数学创造的又一个缩影. 虚数起源于代数方程求解，复数概念的形成源于观念的突破，复数因其几何解释及其广泛应用最终获得确认. 复数概念及理论的创立就是一个生动的经典案例. 虚数是数学的一个奇葩. 从实数解的有无到虚数单位 i 的引入及其应用，揭示了数学知识的产生过程，展现虚数的历史轨迹. 复数概念的提出，展示数学是一种符号游戏，是自由创造. 复数创造的过程其实是人类文化传承的过程. 从复数概念的创建和复数意义的诠释中感受数学的历史文化，感悟数系扩充的思想，感叹人类思维的力量. 复数的出现是人们一次伟大思维的变革，是人类传统思想上的一次突破. 复数概念及理论的创立是数学创新的经典案例. 复数的创立启发人类创新，冲击人们僵硬的大脑，促使人们进行思维的变革，突破传统思想. 复数概念提出是数学历史上的经典创新.

1　稍纵即逝的创新火花

人类许多创新往往源于一闪而过的创新火花. “负数开平方”与人类数学认识相矛盾，这种冲突萌生出数学发明的火花，冲突时所产生的创新火花却一个又个被忽视了. 公元 3 世纪，著名数学家丢番图(200－284)已得到“一个数的平方等于负数”，即 $x^2=-b$. 9 世纪，印度数学家摩诃毗罗以及 12 世纪的数学家婆什伽逻也面临过负数开平方. 15 世纪，法国数学家舒开解方程 $x^2+4=3x$ 得到

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-4}.$$

他认为，负数不能开平方，方程不可能有解.

16 世纪，卡当(1501—1576)遇到一个令他非常困惑的问题：“两个数的和是 10，积是 40，求这两个数. ”他认为，“显然，该问题是不可能的. 不过我们可以用这样的方式求解. 将 10 等分，得 5，自乘得 25，减去乘积自身(即

40)，得-15. 从 5 中减去和加上该数的平方根即得乘积为 40 的两部分，即 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$. 这样令人诧异的表达式也能满足题目的要求”. ①即

$$(5+\sqrt{-15})+(5-\sqrt{-15})=10,$$

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=5^2-(\sqrt{-15})^2=25-(-15)=40.$$

卡当觉得与之类似的“数”$a+b\sqrt{-1}$奇妙但又无用. 他说：“算术就是这样的精巧奇妙，它最根本的特点，正如我说过的，是既精妙又无用”.

荷兰数学家吉拉尔(1595—1632)也觉得“虚数”根存在是合理的. 他提出了代数基本定理：每个 n 次方程都有 n 个根，并给出了方程根与系数之间的关系法则. 他认为，“为了保证根的个数应该接受虚数，至少可以把它作为方程的形式解……复数的存在，保证了根个数的合理性……正是由于虚数，使方程出现了不可能不出现的根……才使不可能解的问题显得像是可以解的样子. ”这一切表明，“荒诞的数”$a+b\sqrt{-1}$存在有一定的合理性. 那时已萌发出“复数”创新的火花. 可惜的是，丢番图、婆什伽逻、卡当等数学家都因负数不能开平方而摒弃“数”$a+b\sqrt{-1}$. 因此，也失去了创新复数 $a+b\mathrm{i}$ 的机会.

2 复数：概念的创新

复数概念是打破传统、标新立异的创新经典. 复数的创新过程中，数学家一改常态，标新立异，打破常规，突破观念束缚，提出复数概念. 美国数学家哈尔莫斯认为：“数学是创造的艺术，因为数学家创造了美好的概念”. ②数学家与画家、诗人一样，都进行创造活动，区别在于：画家用形与色进行创造，诗人用语言创造，而数学家是用概念创新. 数的发展具有传奇色彩，实数一扩展，新的数就被叫做是“虚”的，并大胆地走向异端. 复数的创新源

① 汪晓勤，韩祥临. 中学数学中的数学史[M]. 北京：科学出版社，2002：67-75.

② 张楚廷. 数学与创造[M]. 大连：大连理工大学出版社，2008：91-93，148.

于"负数开平方"的认识. 人们冲破了"任何数的平方都是非负数"的传统观念，复数的创立就"简单到不能再简单了"，只要令 $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$，于是创造出复数 $a+b\mathrm{i}$，即 $a+b\sqrt{-1}$. 当然，这需要勇气，敢于标新立异. 诺贝尔物理学奖获得者、美籍华人朱棣文曾说："……要想在科学上取得成功，最重要的一点就是要学会用与别人不同的方式、别人忽略的方式来思考问题，也就是说，要有一定的创造性". ①

如邦别利(约 1526—1573)利用虚数定义，不难得到 $\sqrt{-1}$ 的运算法则

$(+\sqrt{-1})\cdot(+\sqrt{-1})=-1,$

$(+\sqrt{-1})\cdot(-\sqrt{-1})=+1,$

$(-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1})=-1.$

依此规则，很容易地建立复数概念与复数理论. 这样，创造性地将虚数和实数统一起来. 可惜的是，一直等到欧拉才给出复数的定义，复数的运算法则才逐渐被认可.

欧拉认识到"数" $a+\sqrt{-b}$ 的关键是 $\sqrt{-1}$. 他用 i 表示 $\sqrt{-1}$. 于是有了复数 $a+b\mathrm{i}$. 复数的创立提供了一个创新的典范. 21 世纪，"一种最好的教育就是有利于人们具有创新性，使人们变得更善于思考……". ②复数是概念的创立，是人类突破传统观念的束缚，也是展示人类数学思维的奇迹.

3　复数，饱受"指责"

打破常规，看似容易却十分很难. 复数的磨难启示，要创新就不怕打击. 复数的创新也要经得起考验、指责. 复数经历的种种指责是创新过程最生动的材料. 欧拉定义了复数，高斯用 $b\sqrt{-1}$、$a+b\sqrt{-1}$ 区分为虚数与复数. 但复数仍无法被接受. 数学家笛卡尔认为，这些虚根 $a+b\mathrm{i}(ab\neq 0)$ 不可能对应任何数，并给它一个不幸的名字"虚数"，即虚构中的数，这是历史上

---

① 北京创造学会. 创造创新五百问[M]. 北京：民主与建设出版社，2005：8.

② 欧小松，等. 创新教育学[M]. 长沙：中南工业大学出版社，2000：5.

第一次给出虚数的名字. 对数的发明者耐普尔称 $a+bi(b\neq0)$ 为“实数的鬼魂”, 莱布尼兹称之为“两栖物”. 虽然欧拉创造性地定义复数, 但不明白复数的意义, 并指责说, 这种“数”存在于“虚幻之中”, “一切形如 $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$ 的数学式子都是不可能有的, 想象的数, 因为它们所表示的是负数的平方根. 对于这类数, 我们只能断言, 它们既不是什么都不是, 也不比什么都不是多些什么, 更比什么都不是少些什么, 它们纯属虚幻……因为所有可以想象的数要么大于零, 要么小于零, 所以负数的平方根显然不能包含这些数之中, 因此我们说, 它们不可能是数.”

也有一些数学家拒不接受 $\sqrt{-1}$, 并提出如下悖论, 以示复数极其“荒谬”, 表示绝不能接受虚数:

$$-1=(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1,$$

即 $1=-1$. 这更增添了数学家对虚数的误解. 英国数学家德摩根在《数学学习与困难》中说, 虚数 $\sqrt{-a}$ 与 $-b$ 相类似, 当作为问题的解出现时, 它们表示的是某种矛盾或荒谬. 就实际意义而言, 它们都是假想的数, 因为 $0-a$ 和 $\sqrt{-a}$ 一样不可理解. ①复数要获得认可的确很难. 可见, 无论何时, 打破传统观念的束缚, 进行创新活动绝非是一件容易的事情. 复数所经受的风雨让我们知道: 任何发明创造, 都不要害怕指责, 要经得起时间的检验, 耐得住孤独寂寞, 坚守成果, 要有坚韧不拔的精神.

4 复数的诠释: 意义的构建

复数的接受与认可极其不易. 许多数学家, 如吉拉尔、韦塞尔、高斯、欧拉等, 都尝试负数平方根意义的解释, 提出复数的直观表示方案, 诠释复数意义. 复数的各种意义的创立, 也是数学创新的典范.

(1) 韦塞尔用坐标表示复数的几何意义

以 1 为单位的一条实轴 x, 还有一条以 $\sqrt{-1}$(i) 为单位的虚轴 y, 相互

---

① 汪晓勤, 等. 荒岛寻宝: HPM 视角下的复数教学[J]. 数学教学, 2003(6).

垂直. 与韦塞尔相仿,数学家吉拉尔把实轴 x 按逆时针方向旋转 $90°$得到虚轴 y. 他们认为,复数 $a+bi$ 可用有向线段 OA 表示,如图1－10,复数 $a+bi$ 的四则运算可以用有向线段的运算法则进行.

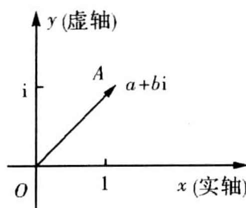


图 1－10

(2)高斯创立了复平面

横轴是实数轴,竖轴称为虚轴,表示纯虚数,表示复数的这个平面称为复平面,复数 $a+bi$ 就可以用平面上的点(a,b)表示,如图 1－11. 高斯指出:“从几何表示法中,人们看到$\sqrt{-1}$直观意义的证明完全有了依据,而不需要更多的理由才能将这些量纳入算术领域之中.”高斯一直认为虚数也是可以赋予客观存在性的. 高斯对复数的解释极为精彩:“迄至目前为止,人们对于虚数的考虑,依然在很大程度上把虚数归结为一个有毛病的概念,以致给虚数蒙上一层朦胧而神奇的色彩. 我认为只要不把$+1$,-1,$\sqrt{-1}$叫做正一、负一和虚一,而称之曰向前一、反向一和侧向一,那么这层朦胧而神奇的色彩即可消失.”[①]高斯的几何表示使复数有了深刻的内涵,自然地,高斯被尊称为复数理论的重要贡献者之一.

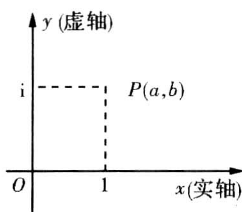


图 1－11

(3)欧拉创立复数三角表示以及欧拉公式

这一创立真是神来之笔,让人拍案叫绝,也让人耳目一新. $a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,$r=\sqrt{a^2+b^2}$为复数 $a+bi$ 的模,θ 为其幅角;诗一样的欧拉公式 $e^{i\pi}+1=0$,把最简单的数 0、1 以及似乎不相关的 i,e,π 巧妙地关联起来. 一个来自几何,是数学中最重要的符号,有说不尽的奥妙;一个来自分析,在科学领域大展身手,是那样的不可思议;一个来自代数,却神秘得令人又爱又恨. 它们每一个符号都是一本厚重的书,内容丰富多彩,妙不可言.

---

① 莫里兹. 数学的本性[J]. 朱剑英,译. 大连:大连理工大学出版社,2008:142.

(4)19世纪中叶后,复数的神秘感烟消云散

1837年,爱尔兰数学家哈密尔顿认为,复数 $a+bi$ 并不是 $2+3$ 意义下的和,加号的使用只是一个历史的偶然,bi 并不能被加到 a 上去.应把复数 $a+bi$ 看作一个有序的实数 (a,b).哈密尔顿就把复数建立在严格的实数基础之上.①实数的扩充不容易,数的每一次扩充在最初的时候都伴随着人们的某种担心与彷徨,虚数因为与实数相对而被认为是一种空洞无物的符号游戏.吉拉尔、韦塞尔、高斯、欧拉等创造性地提出复数 $a+bi$ 的代数形式、三角形式,巧妙地构建复平面,给出复数的几何意义,特别是吉拉尔、哈密尔顿复数的二元数理论解释完全揭开了复数神秘的面纱.

① 汪晓勤,韩祥临.中学数学中的数学史[M].北京:科学出版社,2002:67-75.

第二章　神奇的代数:思维的挑战

第一节　方程的历史:符号的游戏

> 大量的符号,往往使得数学被认为是一门难懂而又神秘的科学……不能认为,数学术语和符号的引入,增加了这些理论的难度.相反地,它们的引入易于理论的表达和问题的解决.特别是在数学中,只要细加分析,即可发现符号化给数学理论的表述和论证带来极大的方便,甚至是必不可少的.①

方程是数学的重要内容,它不仅在数学领域起着举足轻重的作用,而且在我们的日常生活中也有着广泛的应用.随着时间的推移,方程的历史、文化在中小学数学中渐渐地被淡化,方程的内容沦为仅仅是一个数学概念、解方程及解应用题.这是不敢想象的事情.所以,我们需要关注方程悠久的历史,体验其中所凝聚的数学家无穷的智慧,尊重无数数学家的血汗和劳动,传承方程中的数学经典.数千年方程的历史文化留下来的不仅仅是方程的概念和应用,而是更多的数学家对方程的执著追求,以及勇于进取,敢于接受智力挑战,还有处理已知与未知时平等对待、一同满足某一等量关系的态度,以及构建方程解决问题的策略.追溯方程的历史文化,既领

① 莫里兹.数学的本性[M].朱剑英,译.大连:大连理工大学出版社,2008:108.

悟人类历史上数学家超常的智慧，又体验到方程与人们生活的关系，特别是体验到数学家离奇的游戏，既学习了丰富的方程知识，又经历了数学文化发展过程.

1 经典的符号游戏：字母代数

未知数从文字、符号到字母逐步替代，都是历代数学家人为创造的结果，是数学家摸索、尝试了几千年后最终获得重大突破. 字母代数是符号代数发展的必然. 公元 3 世纪，希腊数学家丢番图开始了符号数学的时代. 方程中的未知数用符号表示，同时还给出了高次幂的符号，如 Δ^y 表示平方，k^y 表示立方，$\Delta\Delta^y$ 表示四次方，Δk^y 表示五次方，kk^y 表示六次方. 令我们意想不到的是，常数系数总是写在未知数的后面. 丢番图的符号代数让代数迈出了关键性的一步，代数的发展从文字代数到符号代数，发展到字母代数，即代数学.

5—12 世纪，印度人用词语的缩写方式表示代数符号，未知数用 yav 表示，相当于现在的 x，并给出未知数的各次幂的符号. 方程的书写形式是把相等的两个代数式上下对列，如已有相当于 $-9=1\cdot x^2-10x$ 的方程. 印度数学家引用符号体系，有力地促进了方程的进步，有效地促进印度数学的发展.

中国古代"设未知数列方程"的思想方法，包含了中国古代数学家对代数符号化所做的努力. 13 世纪(金元时期)，李冶用天、地，上、下……仙、鬼等词语来表示未知数，以此建立方程，并在前人的基础上简化、整理成系统的"天元术"理论，被称为"天元术". 尽管当时的做法与现代符号在形式上有较大差别，但方法是一致的.

1591 年，法国数学家韦达在《分析术引论》中开始采用元音字母表示未知数、辅音字母表示已知数；后来，笛卡尔用后面的字母 x,y,z 等表示未知数，用前面的字母 a,b,c 等表示已知数，特别是 aaa 用 a^3 表示，慢慢地，方程的字母表示得到了统一，并一直沿用至今，这也改变了方程字母表示曾

经混乱不堪的局面.

由上可知，现代数学“设未知数列方程，解方程”的知识，是由一代又一代数学家通过几千年的努力，进行文化传承才慢慢获得了的简洁结果：字母代数.

2　历史悠久的方程，精彩的案例

方程的历史极其悠久，上下几千年，东方文化、印度文化、阿拉伯文化、古希腊文化，方程的发源地域广阔，有着灿烂的文化、悠久的历史. 方程这个名词，我国最早见于《九章算术》. 当时没有文字符号表示未知数，往往用算筹将 x，y，z 的系数和常数项进行合适排列. 对一次方程组，各未知数的系数利用算筹通过一个方阵进行排列，这可能就是“方程”名称的由来. 我国《九章算术》等书籍中有许多方程的论述以及经典的解方程的算法，其中线性方程组的矩阵解法较世界其他各地的解法早几千年. 人类历史上，很久很久以前已有了一次方程、二次方程、方程组的存在. 许多史记材料都明白无误地记载方程.

一元一次方程最早出现，它在古埃及的“纸草书”中被发现，不过方程的解法纯粹是算术的. 这些古埃及纸草书存在于公元前 2000 年左右. 目前存在的古埃及纸草书仅两件：一件是莱茵特纸草书，现藏于伦敦大英博物馆；另一件是莫斯科纸草书，现藏于莫斯科普希金精细艺术博物馆. 最早的方程源于埃及的纸草书，大约在公元前 1600 年左右，记载着一些数学问题，其中一个问题翻译过来是：“啊哈，它的全部，与它的七分之一，其和等于 19. ”列出来的是最早的方程. 古埃及的纸草书中还有相当于二次方程及求解的问题，涉及的简单形式：$ax^2=b$. 而在同时代的古巴比伦泥板（约公元前 1900 年）记载了很典型的方程问题：求一个数，使它与其倒数的和等于已知数. 即一元二次方程

$$x+\frac{1}{x}=b.$$

丢番图是古希腊亚历山大学后期的重要学者和数学家，是代数学的创

始人之一，丢番图讨论了一次、二次以及个别的三次方程，还有大量的不定方程. 只考虑整数解的整系数不定方程就叫做丢番图方程. 丢番图的墓志铭非常形象生动叙述了他的一生：

过路的人！这儿埋着丢番图. 他一生的$\frac{1}{6}$享受着童年的幸福，$\frac{1}{12}$是无忧无虑的少年. 再过$\frac{1}{7}$的时间，他有了美满温馨的家庭. 5 年后儿子出生，不料儿子竟在父亲临终前 4 年丧生，年龄不过父亲享年的一半. 他在悲痛之中度过了风烛残年. 请您算一算，他活了多少岁才去见死神？

他的墓志铭其实是给出了方程：

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x.$$

公元 8 世纪，阿拉伯数学家阿尔·花拉子米(约 780—850)的《对消与还原》重点讨论解方程有关“移项”和“对消”等方法，把求得的满足方程的未知数的值叫方程的“根”，解方程称为求根. 他把解方程的技术提高了一大步. 花拉子米临终前，当时他的妻子正怀着他的第一胎小孩，为此留下一个有名的遗嘱：

如果我亲爱的妻子帮我生个儿子，我的儿子将继承三分之二的遗产，我的妻子将获得三分之一的遗产；如果生个女儿，我的妻子将继承三分之二的遗产，我的女儿将获得三分之一的遗产.

然而不幸的是，在孩子出生前，这位数学家就去世了，之后发生的事更困扰大家，他的妻子生了一对龙凤胎，而问题就发生在他的遗嘱内容里，如何遵照数学家的遗嘱，将遗产分给他的妻子儿子女儿呢？遗产分配问题，有人给出解法：因为儿子所得财产是妻子的 2 倍，而妻子所得财产是女儿的 2 倍. 设妻子所得财产为 x，则儿子所得财产为 $2x$，女儿所得的财产为$\frac{1}{2}x$，于是得到方程

$$2x+x+\frac{1}{2}x=1.$$

3　押韵的古诗,经典的方程

方程不仅在数学领域起着举足轻重的作用,而且在其他领域也有着广泛的应用.它以自身的发展影响着人们的思维方式,影响着人文精神的体验.如方程与古诗歌特别让人耳目一新:李白街上走,提壶去买酒.遇店加一倍,见花喝一斗.三遇店和花,喝光壶中酒.试问酒壶中,原有多少酒?

李白在街上提着酒壶边走边喝,遇到酒家时壶中的酒加上一倍,遇到花店时喝上一斗.若遇酒家见花店各 3 次后酒刚好喝完.问壶中原来有多少酒.又是古代利用方程求解的问题.可设壶中原有 x 斗酒,于是

$$2[2(2x-1)-1]-1=0,$$

求得 $x=0.875$,从而得知壶中原来有酒 0.875 斗.

明代大数学家程大位的《算法统宗》书中有百羊问题,通过诗歌形式进行叙述:甲赶羊群逐草茂,乙拽一羊随其后;戏问甲及一百否?甲云所说无差谬;若得这般一群凑,再添半群小半群;得你一只来方凑,玄机奥妙谁猜透?求解这群羊的只数,依现在的方法是,设共有 x 只,于是

$$2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+1=100,$$

求得牧羊人的这群羊共 36 只.

从这些古诗中,我们感受了方程思想在文学方面的应用.利用方程思想把这些优美的古诗解读、细细品味后,我们除了感受诗歌的数学美外,也发现方程的妙趣横生,乐趣无穷.类似的古诗还有很多,它们是我们欣赏、品味、交流的重要文化资源.欣赏优美的古诗,经历求解方程的过程,体验数学奇妙和独特的魅力.

4　方程的求解,高超的技巧

方程出现后,解决了很多生活中的实际问题.过去,很多难以解决的问题也有了答案.这勾起了数学家们的好奇心,他们纷纷潜心钻研方程,也促进了方程的发展.由于不承认负数,所以许多数学家对二次方程进行分类,

分类求出相应方程的解.阿拉伯人在处理二次方程时堪称一绝,颇有创意.825年,阿尔·花拉子米出于正系数的考虑,把二次方程均化归为

$ax^2=bx, ax^2=c, ax^2+bx=c,$

$ax^2+c=bx, ax^2=bx+c$

等形式,系数全为正数.若不考虑系数的正负,这些方程,事实上就是今天的 $ax^2+bx+c=0$,其中 $a\neq0$,公元前1600年开始,巴比伦人、古希腊人(《几何原本》)、中国人(赵爽注《周髀算经》)、古印度人都研究过二次方程的求解,只不过花拉子米研究得最经典、最彻底.他是通过具体案例,如 $x^2+10x=39$ 给出的.其中使用配方法非常经典,颇有启发.如图2-1,正方形的边长为 x,在其两邻边作两个边长为 x 和 $\frac{10}{2}$ 的矩形,再补上一边长为5的正方形,最后得到边长为 $x+5$ 的大正方形.先求大正方形的面积,然后再求 x.①即

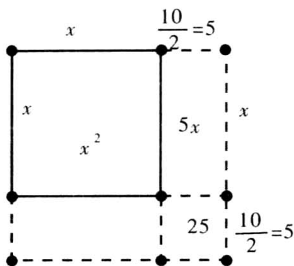


图2-1

$(x+5)^2=25+39,$

$(x+5)^2=64,$

于是 $x=3$(不承认-13,舍去).花拉子米举的每个例子全都借用图形,认真给出方程配方的步骤,明白清晰、直观形象.有数学史家对花拉子米给予很高评价,美国的卡平斯基(1878—1956)曾形象地概括他的工作:"方程 $x^2+10x=39$ 像一条金链贯穿着几百年的代数学".

关于方程的求解,历史上还有许多传奇的故事.1593年,对于荷兰数学家罗曼斯所著《数学思想》中有一道45次高次方程的难题:

$$45x-3795x^3+95634x^4-1138500x^7+\cdots+740259x^{35}+111150x^{37}-12300x^{39}+945x^{41}-45x^{43}+x^{45}=A.$$

当时,驻法国的比利时大使好挑战,曾向法国国王挑衅说,法国没有一

① 徐品方,等.中学数学简史[M].北京:科学出版社,2007:191-199.

个数学家能解决那个45次的高次方程.法国国王想到了韦达,让韦达去想想办法.他们不知道,韦达是解方程的高手,他把方程化归为若干个低次方程,很快得到23个正根.作为回敬,韦达提出了阿波罗尼奥斯的尺规作图,即求作一圆与另外三个圆相切的问题.这让擅长于代数的罗曼斯无所适从、一筹莫展.最后,因作图难题让罗曼斯与韦达成为科学上的好友,惺惺相惜.韦达不仅擅长于代数、几何,还是密码高手,曾受国王的邀请,因破译了密码获取了情报,轻易地战胜了西班牙.西班牙恼羞成怒,西班牙宗教裁判所裁定,因韦达背叛了上帝,缺席判决处韦达以极刑.当然,这只是人类历史上野蛮行径遗留的一个笑柄.①

5　精湛的求根公式,精辟的根与系数的关系

方程通用的求根公式以及根与系数的关系将方程的研究推到一个新高度.这两个方面是解方程以来世世代代数学家极其关注的重大问题.解方程时希望有通用的公式,提供一条方便快捷的路径,以便节省时间处理更多的问题.于是,求根公式就成了数学家思索探求的问题.

古希腊二次方程问题大多和解几何问题联系在一起.公元前1000多年的古巴比伦文献中出现了完全的一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$$

的求根公式.求方程的根时,因一个数的平方不可能为负数而被舍弃,只取正根.所以方程的求根公式为

$$x=\frac{b+\sqrt{b^2-4a}}{2}.$$

欧几里得(公元前330—公元前275)解二次方程 $x^2-ax+b^2=0$(a,b 均为正数)时得到求根公式

---

① 徐品方,等.中学数学简史[M].北京:科学出版社,2007:191-199.

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b^2}}{2}.$$

希腊数学家海伦得到方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式是

$$x=\frac{\sqrt{4ac-b^2}-b}{2}.$$

很明显，这个求根公式是错的. 3 世纪，我国数学家赵爽发现了 $x^2-bx+c=0$ 的求根公式

$$x=\frac{b-\sqrt{b^2-4c}}{3}.$$

为了求解二次方程，历史上许许多多的数学家前赴后继，苦苦探索. 直到 9 世纪，阿尔·花拉子米找到一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的标准求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这一成果记载在《代数学》中. 尽管他受到 $b^2-4ac<0$ 的困惑，但求根公式正确.

3 世纪，赵爽注《周髀算经》中"勾股圆方图"的一段论文"其倍弦为广、袤合，令勾、股见者自乘为其实. 四实以减之，开其余所得为差，以差减合，半其余为广. 减之于弦，即所求也."翻译过来其实相当于：有一矩形，长 x_1、宽 x_2，和 (x_1+x_2) 为直角三角形斜边 c 的 2 倍，即 $x_1+x_2=2c$，设矩形面积为直角边自乘 $x_1x_2=a^2$，长宽和自乘 $(x_1+x_2)^2$ 减去四块面积 $4a^2$，得

$$(x_1+x_2)^2-4a^2,$$

开方就得长宽差 $x_1-x_2=\sqrt{(2c)^2-4a^2}$.

长宽和减去长宽差，再取半，得宽

$$x_2=\frac{(x_1+x_2)-(x_1-x_2)}{2},$$

用斜边 c 减宽 x_2 得另一直角边 $x_1=c-x_2$.

事实上，x_1，x_2 为方程 $x^2-2cx+a^2=0$ 根[1]，即有

$$\begin{cases}x_1+x_2=2c,\\ x_1x_2=a^2.\end{cases}$$

从某种意义来看，公元300年中国已有类似韦达定理的根与系数的关系，也有了求一元二次方程的根的一般方法.只是没有字母化，是文字化一元二次方程的求根公式.中国五千年的古代文明孕育了灿烂的文化，丰厚的数学底蕴.尽管很多中国古代数学家被忽略，中小学数学课本中出现中国古代数学家的人名不多，但中国在数学上的成就，尤其是方程方面的成就是显赫的、湮没不了的.

根与系数的关系是二次方程中的重要内容.后来，数学家们对一元二次方程的根进行深入研究，取得了相当好的结果.如西方数学家不但发现一元二次方程的根与系数关系，还发现了三次方程、n 次方程的根与系数的关系：

$$ax^2+bx+c=0(a\neq0),$$

$$ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq0),$$

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_n=0.$$

一般人都认为，二次方程的根与系数的关系称为韦达定理，事实上不是韦达发现的.二次方程根与系数的关系是谁发现的，这目前仍是一个没有解开的谜.1615年，韦达的确发现了根与系数的关系，但发现的只是关于三次方程的根与系数的关系.

6　离奇的方程，深刻的思维

除了《九章算术》关于列方程组解应用题、李冶（1192—1279）“天元术”、朱世杰的“四元术”（1303）外，还有秦九韶的高次方程的数值解法（1247），即600年后西方所说的“霍纳—鲁非尼方法”，中国的许多数学研

---

① 傅钟鹏.勾股先师商高[M].北京：新蕾出版社，2001：67.

究始终走在世界数学发展的前列，为数学的发展作出了杰出的贡献.①1819年7月1日，英国人霍纳提出了高次方程的一种巧妙解法，因其独到之处而被命名为“霍纳方法”.事实上，意大利人鲁非尼早在15年前已获得这一方法，他们要求将这一数学方法命名为“鲁非尼方法”，英、意双方争论不休.真是孤陋寡闻，正巧被一位刚到欧洲的阿拉伯人听到后嘲笑道，并从包里拿了本书给他们看，说道：都不要争了，依他看来这个方法应该称作“秦九韶方法”.此时，他们才如梦如醒，双方在争论毫无意义的发明权.因为早在570多年前，中国人秦九韶已经发明了高次方程的数值解法.

高次方程的一般解法一直是数学家非常关注的工作，并由此引出一系列极富趣味的历史佳话.即便如今，一般人也不会想到高次方程的求根公式会与高等数学有直接关系.

对高次方程研究首先从三四次方程开始.大约在1500年，意大利数学家费罗宣称已得到$x^3+px=q$的一般解，但未公开解法，后来把解法秘诀传给他的得意门生菲奥尔.不久，意大利一位自学成才的数学家塔尔塔利亚(意为口吃者)，宣称掌握了三次方程$x^3+px^2=q$的代数解法，同样保密.菲奥尔得知后很不服气，向塔尔塔利亚挑战.塔尔塔利亚决定接受挑战.挑战前，塔尔塔利亚又发现了$x^3+px=q$的一般解.1535年2月22日，在米兰教堂进行比赛，这可能是最早的“数学竞赛”.当时双方约定，给对方30道都是关于三次方程的难题.结果，在2小时内塔尔塔利亚求得全部30道三次方程的解，而菲奥尔没有求得任一方程的解，塔氏大获全胜.塔尔塔利亚却不愿公布三次方程的解法.当时，意大利数学家卡当编写《大术》专著，四处收集资料.他几次向塔尔塔利亚讨教三次方程公式解法均遭拒绝.1539年3月，卡当想方设法将塔尔塔利亚骗到米兰，软缠硬磨，终于获得三次方程公式一般解法口诀，并且严守秘密.可是，口诀语句晦涩，如暗语般的25行诗歌.后来，他悟出其中的秘诀，并在《大术》中介绍了三次方程的公式解法.塔尔塔利亚非常愤怒，指责卡当背信弃义，并向卡氏宣战，这样

① 李文林.数学史概论[M].北京：高等教育出版社，2002：17-18.

又导致了第二次“数学竞赛”:双方各拟 31 道题,所涉及知识较广,要求 15 天内通过书信向对方交卷. 这次卡当未参加,他派了仆人、他的学生、后来的女婿费拉里应战. 塔尔塔利亚 7 天内解出了大部分问题,而费拉里过了 5 个月才交出答卷. 从 1546 年 7 月到 1547 年 2 月间,他们先后利用通信,12 次相互提供解法,也互相指责对方错误. 没办法,后来又进行第三次挑战,当场竞赛,但因种种原因不了了之. ①这是历史上有名的关于三次方程公式解的一桩公案,它在意大利数学家之间前后持续了近 50 年的争论和竞赛,最终诞生了三次方程一般解法——卡当公式. 这场震惊历史的数学论战,使沉寂 1300 多年的欧洲代数开始了新篇章.

重温 $x^3+px=q$ 的解法,仍然非常有意思,我们能体验到数学家精湛的技巧,巧妙的思路. 卡当悟出三次方程一般解法的口诀,如考察方程 $x^3+px=q$,先研究

$(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$,

令 $q=a^3-b^3$, $p=3ab$,

找到合适的 a, b,则 $x=a-b$ 就方程 $x^3+px=q$ 解. 如何求 a, b?

解方程组

$$\begin{cases} a^3-b^3=q, & (1) \\ 3ab=p. & (2) \end{cases}$$

由(2)得 $b=\dfrac{p}{3a}$,代入(1)化简为整式,得

$27a^6-27qa^3-p^3=0$,

令 $y=a^3$,即有一元二次方程

$27y^2-27qy-p^3=0$,

求出 y,立即得到 a, b 值,于是得到解 $x=a-b$,将 a, b 的具体值代入,即得方程的解,这就是后来所说的卡当—塔尔塔利亚公式. 面对卡当—塔尔塔利亚公式发明之争,卡当也认为,塔尔塔利亚具有优异的、绝对的、超

---

① 傅钟鹏. 勾股先师商高[M]. 北京:新蕾出版社, 2001:67.

人的聪明和智慧，他的全部才能应该享有这一发现的荣誉.

类似塔尔塔利亚和卡当把三次方程化为一个二次方程，通过二次方程求得三次方程的解，费拉里联想到应该设法把四次方程归结为一个三次方程求解，事实证明他的思路完全是正确的. 对于一般三次方程

$ax^3+bx^2+cx+d=0$,

通过变换 $x=y-\frac{b}{3a}$，可化为形如 $y^3+py=q$ 的方程，立即求得方程的根.

在得到三次方程和四次方程的一般解后，大家把目光关注在五次及五次以上方程的求解. 大数学家拉格朗日面对高次方程的求根公式的挑战，几多曲折、几多失败，无限感慨:"这好像是向人类智慧挑战". 1802 年，阿贝尔读大学时，他以为自己发现了五次方程的一般解法. 不久后，纠正了自己的错误想法，在早年论文中提出并证明五次及以上次方程根式解的不可能性. 什么样的五次及以上方程才有根式解? 伽罗华于 1830 年发表关于方程的短文，提供了高次方程根式解的可能性判别标准，所给出的结果最终导致群论的诞生. ①他们开创了数学的新时代，引起代数学的一次革命，树立起了数学史上一座丰碑. 阿贝尔和伽罗华都是英年早逝，伽罗华不到 21 周岁，阿贝尔不到 27 周岁. 阿贝尔因贫病交迫，疾病缠身而去；而伽罗华年轻气盛，在为毫无价值的事情决斗中白白送命. 著名数学埃尔米特曾说，他们的工作够我们享用 150 年. 如果上天再给他们十年、二十年，毫无疑问对数学的发展会作出更辉煌的贡献. 他们为高次方程而生，却不是因方程而死. 英年早世，可惜之极.

---

① 徐品方，等. 中学数学简史[M]. 北京：科学出版社，2007：191-199.

第二节　对数的技术:数学的创新[①]

一个人的寿命如果不拿他活在世界上的时间的长短来计算,而拿他一生中所做工作多少来衡量,那么可以说,对数的发现不仅避免了冗长的计算与可能性的误差,而且实际上倍延了天文学家的寿命.[②]

——拉普拉斯

对数表、反对数表随着计算技术的发展已经退出了中学数学课程内容的历史舞台.对数、对数运算等保留在数学课程内,附加上对数的解题,这就是对数在中学数学里的全部.如今似乎对数显得不重要了,或对数没用了.我们认为,出现的原因是对对数产生的文化历程不了解,对对数概念繁衍的过程不清楚所致.从产生的"土壤"来看,对数是为简化运算、进行指数计算而发明的.为了完整地实施数学课程标准,加强数学文化的教学,我们有必要了解对数的文化特性,研究对数的文化经历.

1　繁琐的计算呼唤着对数

15—16 世纪,天文的研究、三角的计算、航海的进行、商品交易,斯蒂文的《论十进制小数》出版后,多位的小数计算变得繁琐,而尤其是三角函数表的制作、天文数字的圆的半径的参与计算,冗长繁杂的数字计算变得十分繁琐,让人感觉万分厌倦.这些促使人们去寻找简便的计算方法.令人厌烦的计算,往往吓倒了许多运用数学的人,人们不得不花费精力和才能用于繁重而单调的计算,解除天文、航海、造船、测绘等复杂计算的困惑.于是,欧洲兴起一股造表热,如平方表、立方表、平方根表、立方根表等.这一

① 此节发表于《数学教学研究》2010 年第 2 期,有删改.

② 徐品方,等.数学符号史[M].北京:科学出版社,2008:272.

切给对数发明指明方向,给对数表的制作提供契机.

由于当时天文和球面三角的发展,许多数学家寻找三角的简便计算方法,在计算问题上费过许多心血,但没有什么实质性进展,只是改进了传统的四则运算方法等一些零星结果.耐普尔说明了发明动机,"没有什么比大数的乘、除、开方或开立方运算更让数学工作者头痛更阻碍计算者的了.这不仅浪费时间,而且也容易出错.因此,我开始考虑怎样消除这些障碍."①

2 错失历史上最简单的发明

事实上,对数是数学史非常简单的发明.通过开方求底数,通过乘方求幂,如何求指数?其实很简单,定义对数:一个幂中指数其实就是与底数、幂有关的一个数,即对数.可是,人类的认识不可能一帆风顺的.公元前200年,原始的对数已经萌芽了.阿基米德的《论数砂》中就有数列:

$1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, \cdots$

$0, 1, 2, 3, 4, \cdots$

他已经发现了幂运算与指数运算间的关系,幂的乘除可以化为指数的加减,从而可大大地简化运算.阿基米德没有对数观念,更没有提出对数表的想法.后来人还是能感觉到,对数其实就是指数,对数的发现能提供引导作用.

随后,休盖、施雷伯、鲁道夫、阿皮亚努斯、弗里修斯、斯蒂费尔逐步找到了把乘除转化为加减、乘方开方转化为乘除的简便方法,逐渐显露出对数思想.特别是,15世纪的德国数学家斯蒂费尔研究数列,他的《整数算术》中提出了"指数"和"原数"概念,并把指数由正整数拓展到整数范围:

原数	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	2^2	2^3	2^4	…
指数	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

斯蒂费尔的本意可能是,要求两个原数的乘积,只要计算两原数的指

① 汪晓勤,等.中学数学中的数学史[M].北京:科学出版社,2002:99.

数就可以了.他这里已经有类似于“对数”的想法.离对数的发明也只有一念之差.如果再往前走一步,他将发明以 2 为底的对数,但他终究没能走出这关键一步,于是,把对数的发明权留给了耐普尔.对数的本质事实上就是算术级数与几何级数的联系,对数思想就是把握对数与指数间的联系.大多数数学家意识到这些关系,只是没有明确对数观念而已.

3　对数被天才发现

耐普尔的对数理论始于 1594 年.非正整数的指数概念还是很模糊的.指数与对数间还没有联系起来,耐普尔的对数观念不完善,但对于传统的四则运算却有所突破,靠的是运动学利用几何术语解释对数方法.耐普尔对数的几何方式如下:

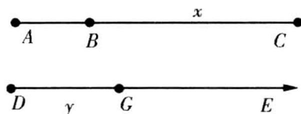


图 2-2

设点 B 沿线段 AC 运动,点 G 沿射线 DE 运动,初速度相同.如图 2-2.设点 G 匀速运动,而点 B 进行减速运动,且 $DG=y$ 时,则 $BC=x$.这时,耐普尔把 DG 定义为 BC 的对数.

“对数”(logarithm)一词是由耐普尔创造的.耐普尔的对数是没有底的观念,也不是如今从指数定义对数.后人称他的对数为“耐普尔对数”,并记为

$$y=Nap\ \log x.$$

“对数的发明好像一个晴天霹雳,突然来到世界上”,麦尔顿男爵在纪念耐普尔时说,“前人的任何工作都未能导致这项发明,没有什么东西可以预见到它的来到.这项发明是孤立的,它没有借助其他智力工作,也没有遵循原有的数学思想路线,就突然闯到人类思想中来.”①同一时期,另一位瑞士数学家杰斯特·别尔基也独立地发明了对数.他出版的《算术与几何级数表》比耐普尔晚六年发表,其中有两串数②:

---

① 欧阳绛.数学的艺术[M].北京:农村读物出版社,1997:91.

② 徐品方,等.数学符号史[M].北京:科学出版社,2008:272-275.

0	1 000 000 000
10	1 000 010 000
20	1 000 020 000
30	1 000 030 000
⋮	⋮
990	1 000 994 967

第一列是算术级数，第二列是几何级数. 这两串数给出了算术级数与几何级数间的对应关系：

$10n=a1.0001^n$，

即 $1.0001^n=\frac{10n}{a}$（$a=10^8$）.

依对数的现代记法是 $n=\log_{1.0001}\frac{10n}{a}$，

即$\frac{10n}{a}$是n的反对数. 依此看来，别尔基的表就是一张反对数表了. 有人说，别尔基很可能受开普勒的劝说，才从事对数并著述的. 别尔基认为：

考虑到算术级数和几何级数的性质和对应性：后者中的乘法是前者中的加法，后者中的除法是前者的减法，前者中的开方是前者中的减半……我发现，拓广这些数表是十分有用的，我们不仅可以避免乘除开方运算中的困难，而且更重要的是，我们也可以在两个已知数之间随意放置多少几何中项. 任何有经验者皆知，没有这些数表，计算是多么困难. ①

在耐普尔发明对数和对数表后，英国数学家布里格斯首先意识到对数的意义和作用，全身心投入对数的研究和传播之中，在大学开设对数讲座. 后来的事情完全说明，耐普尔对数已把布里格斯的头脑和双手引向了崭新的、极佳的对数中去了.

尔后，布里格斯感觉到耐普尔对数使用不便，便写信与耐普尔交流，并去拜访共同讨论对数的改进问题，最后确认 1 的对数为零，10 的对数为 1

① 汪晓勤，等. 中学数学中的数学史[M]. 杭州：浙江大学出版社，2004：99.

即以10为底的常用对数，称之为布里格斯对数，这种对数对于数值计算尤为方便. 接着，布里格斯出版了小册子《一千个数的对数》，给出了1～1000的第一张常用对数表. 1624年，他又出版了重要著作《对数算术》，其中详细地解释了求对数的方法，并给出了1～20000和90000～100000之间整数的常用对数表. 最后，20000～90000间的常用对数由荷兰数学家弗拉克完成.

1620年，布里格斯的同事天文学家爱得蒙·冈特出版了《三角法则》，第一个给出了三角函数(正弦、正切)的常用对数表. 尔后，很多数学家进行三角对数的研究和三角对数表的出版，约翰·司皮得尔、雷恰·诺乌都出版三角对数研究成果，极大地推动对数方法的传播和使用. ①荷兰数学家弗拉克也出版了《三角对数表》和《1到10000的正弦、正切和正割值以及对数值表》.

对数在欧洲迅速地得到推广流行，离不开数学家的热忱和推崇. 开普勒出版了《耐普尔对数表》，爱德蒙·温盖特出版《对数算术》. 荷兰数学家弗拉克的《三角对数表》和《1到10000的正弦、正切和正割值以及对数值表》最早提到常用对数的基本原理：为了更大的方便，取1的对数为0，10的对数是1，100的对数是2，依此类推……对数的第一个数字称为“首数”. 对数的首数是由弗拉克第一个给出，对数的尾数由沃利斯在《代数》中第一次给出. 18世纪后，人类才普遍运用对数的首数、尾数，自欧拉开始使用后才传播开来.

格雷果里出版《圆周和双曲线的正确求法》，墨卡托出版《对数技术、或正确、方便的编造对数的新方法》，他们给出了编造对数表的方法.

4　天才数学家欧拉的对数定义

欧拉的对数定义不是天外来客. 阿基米德在《论数砂》中认为，对数列

$$1,10,10^2,10^3,10^4,\cdots$$

计算第一列任意两数乘积，只要将第一列两数的指数相加. 德国数学家斯

① 梁宗巨，等. 世界数学通史(下)[M]. 沈阳：辽宁教育出版社，2005：611-615.

蒂费尔把对数的意思说得更清楚.他在《整数算术》中提出了"指数"和"原数"概念,对数列

原数	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	2^2	2^3	2^4	…
指数	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

中,计算原数的积可以转化为指数的和.由上,欧拉很有可能把握了阿基米德、斯蒂费尔早期所孕育的对数思想,从指数得到对数的定义:若 $a^b=N$,则称 b 为以 a 为底 N 的对数,即

$N=a^b \Rightarrow b=\log_a^N$(其中 $a>0$,且不等于 1).

欧拉定义中,对数事实上就是指数的再表述,对数普遍被看作指数.对数的发明早于指数的应用,这是数学发展史上一个极有戏剧性的现象.

对数符号"logarithm"首先由约翰·耐普尔使用,后人称他的对数为"耐普尔对数",并记为 Nap log x.

对数的底是不明确的.德国天文学家开普勒把对数一词记为"log",后来,意大利数学家卡瓦列里第一个使用"log".1893 年,意大利数学家皮亚诺用"log x"表示以 10 为底的对数,斯特林厄姆记"$b$log x"表示以 b 为底 x 的对数,自然对数"natural logarithm"头一个字母缩写为 ln.直到 1902 年,德国数学家施图尔茨等人用"a log b"表示以 a 为底 b 的对数,最后逐渐演变为"$\log_a b$"现代形式,这是集体智慧的结晶.①

5 对数带来的荣誉

耐普尔曾预言,耐普尔家庭的荣耀将源于《圣约翰启示录》中的一个平凡发现,让他意想不到的却是,这份荣耀更多的是来自于耐普尔对数.有趣的事情还有:1971 年,尼加拉瓜发行一套纪念邮票,为纪念数学对人类文明和文化的作用,对数发明与对数公式被认为是十大最重要的数学公式之一,将耐普尔的对数发明和对数记号放在一张邮票的显著位置,并在反面

① 徐品方,等.数学符号史[M].北京:科学出版社,2008:272-275.

对该公式的重要性作简明扼要的说明. ①

几乎是同时代的天文学家伽利略说:“给我时间、空间和对数,我可以创造出一个宇宙.”18 世纪的法国数学家拉普拉斯说:“一个人的寿命如果不拿他活在世界上的时间的长短来计算,而拿他一生中所做工作多少来衡量,那么可以说,对数的发现不仅避免了冗长的计算与可能性的误差,而且实际上倍延了天文学家的寿命.”

对数与解析几何、微积分一同是 17 世纪最突出的三大数学成就.“……重要的数学方法基本确定了:主要由笛卡尔制定了解析几何,由耐普尔制定了对数,由莱布尼兹、也许还有牛顿制定的微积分.”(恩格斯)同时,对数也是有史以来,数学计算技术上的重大突破,“计算方法之所以有奇迹般的力量,是由于三大发明,即阿拉伯计数法、小数和对数.” 对数的发明具有划时代的意义.“一项重要的发明就是对数——它节省了大量的人力的计算方法,它无疑是数学史上的一个里程碑.”②

第三节　数列的文化:悠久的历史③

清代数学家顾观光说:“堆积之术详于杨(辉)氏,朱(世杰)氏二书,而创始之功,断推沈(括)氏”. 日本数学家山上义夫曾这样评论说:“沈括这样的人物,在全世界数学史上找不到,唯有中国出了这样一个.”④

① 伊夫斯. 数学史概论[M]. 欧阳绛,等,译. 太原:山西经济出版社,1993:237-238.

② 伊夫斯. 数学史上的里程碑[M]. 欧阳绛,等,译. 北京:北京科技出版社,1990:199.

③ 此节发表于《数学教学研究》2011 年第 8 期,有删改.

④ 江苏社会科学院《江苏史纲》课题组. 江苏史纲(古代卷)[M]. 南京:江苏古籍出版社,1993:518.

数列是中小学数学中的一个核心内容，是数学的重要概念. 数列很早就体现出人类高超的睿智，而不是曾经被人认为是"笨拙计算"的数列. 数学发展中，数列是其中的一个重要主题. 阿拉伯、古印度、中国、古希腊等国家的数学历史中都有数列的主题，分布广泛. 人类对数列的认识很早，不晚于函数，而且各个国家、地区对数列的认识水平较深入. 几千年来人类的努力，数列不断获得发展，数列的和形成级数，数列促进级数的产生以及组合数学的发展. 数列中的历史文化因素催化数列发展，其中的人文气息和人类智慧能给予人类对数学以极大的兴趣，现在我们感觉到有些枯燥乏味的数学其实本身能引人入胜，是生动活泼的、趣味盎然的. 追寻数列产生的历史，追踪数列的历史轨迹，品味经典的数列名题，必能体验到数列的文化内涵，感受着数列的文化魅力，享受着纯厚的数学文化.

1　数列的历史极其悠久

数列是初等数学中的重要内容，也是数学中的重要模型. 但我们对数列认识却有些肤浅，知之甚少，好像历史底蕴不深. 数列，包括等比、等差数列，都是很古老的对象，历史悠久，文化灿烂. 最早出现在古埃及的纸草书、古巴比伦的泥版书，以及中国古代《算数书》(公元前 200)和《九章算术》(公元前 100)中. 中国的《九章算术》、西方欧几里得的《几何原本》都有丰富的数列内容. 它们表明，数列是非常古老的数学对象，无论东方还是西方，古往今来，数列始终是数学研究的重要问题之一.

数列的历史悠久，有关数列话题古老.《庄子》中有"一尺之棰，日取其半，万世不竭"；古代《易经》中有"是故《易》有太极，是生两仪；两仪生四象，四象生八卦". 这里包含了数列的含义.

约公元前 30 世纪至公元前 17 世纪，巴比伦泥版上就有一串神秘的数字：

1，4，9，16，25，36，49，1・4，1・21，2・24，…，58・1.

这一串数表示什么？众人猜测纷纷. 从巴比伦的 60 进位制解释：

$1 \cdot 4=60+4=64=8^2, 1 \cdot 21=60+21=81=9^2, \cdots,$

$58 \cdot 1=58\times 60+1=3481=59^2.$

原来这串数表示的就是数列

$1,2^2,3^2,4^2,5^2,6^2,7^2,8^2,\cdots,59^2.$

把一串数相加,就是历史上非常有名的自然数平方和,稍后会出现更一般的"自然数方幂和"问题的研究.

公元前200年,阿基米德的《论数砂》中就有数列:

$1,10,10^2,10^3,10^4,\cdots$

$0,1,\ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ \ \cdots$

15世纪,德国数学家斯蒂费尔在《整数算术》中研究如下两个数列:

$$\frac{1}{8}\quad \frac{1}{4}\quad \frac{1}{2}\quad 1\quad 2\quad 2^2\quad 2^3\quad \cdots$$

$$-3\quad -2\quad -1\quad 0\quad 1\quad 2\quad 3\quad \cdots$$

主要是寻找幂的乘除运算与指数加减运算间的关系. 由此来看,数列的历史是相当的悠久,内涵也十分丰富.

2　经典的数列

研究数学发展的历史,可探索到人类早期研究的经典数列:等差(比)数列、算术平均数、几何平均数、调和平均数等对象,这些都是初等数学中的基本内容,也是经典的内容. 研究古希腊《几何原本》,能发现欧几里得利用合分比推导出等比数列的求和公式的思路,发现古希腊数学家在研究数列时如何得到算术平均数、几何平均数、调和平均数.

研究历史名著《九章算术》,发现我国祖先早就有如等差数列的通项公式、公差的概念、及求等差数列的和、求公差等计算方法,并推导出了一些公式,如

$$a_n=a_1+(n-1)d,\ d=\frac{a_n-a_1}{n-1}.$$

研究7世纪印度数学家,学习波罗摩笈多得到的等差数列通项、数列

和法则的思路:项数减 1,乘以公差,再加上首项;首项与末项之和的一半乘以项数. ①

数列中有许多经典名题,这些都是历史的沉淀,人类的智慧,个个奇珍异宝,题题启迪智慧. 高斯广为流传的巧算从 1 到 100 的自然数和的智力故事. 一直到晚年,高斯还经常兴奋地唠叨这件事. 古印度国王极其尴尬的故事:摆放在国际象棋棋盘上小麦总粒数约为 2^{64},相当于 2000 年全球小麦产量的总和! 这些经典的历史名题就不用说了,老幼皆知.

除此之外,还有许多经典的数列名题,通过故事、诗歌体现,颇有文化魅力,展示人类智慧.

名题 1:巴比伦《泥版文书》中有关于分物的等差数列:

10 个兄弟分 100 赛克尔银子,长兄最多,依次减少相同数目. 第八兄弟分得 6 赛克尔,问相邻两兄弟相差多少?

给出的解答是:第一个兄弟分得的银子数用 a_1 表示,则有

$2a_1+14d=12,\ 2a_1+9d=20.$

计算得 $d=-1.6$ 赛克尔. 这说明古巴比伦人已经能运用数列解决许多复杂问题,充分展示了巴比伦人的聪明才智.

名题 2:《孙子算经》是中国古代相当著名的数学经典书籍. 其中有"出门望九堤":

今有出门望见九堤,堤有九木,木有九枝,枝有九巢,巢有九禽,禽有九雏,雏有九毛,毛有九色. 问各几何?

《算盘全书》是意大利数学家斐波那契经典著作,其中也给出相似的"出门望九堤"②:

今有 7 老妇往罗马,每人有 7 骡,每骡负 7 袋,每袋有 7 个面包,每个面包上有 7 把小刀,每小刀置 7 鞘中,问列举之物全数共多少?

名题 3:久负盛名、家喻户晓的还有斐波那契数列,是 13 世纪意大利数

① 李益中. 简明数学史教程[M]. 北京:科学文献出版社,1995:23-24.

② 高希尧. 数海钩沉——世界数学名题选辑[M]. 西安:陕西科学技术出版社,1982:8-36.

学家斐波那契《算盘书》中内容. 斐波那契数列，又名兔子繁殖问题，其繁殖的规则用数列体现，即是：

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,…

除第一、二项都是 1 外，其后的每一项等于前两项之和. 研究还能发现，相邻两项的比值趋近于黄金分割数；植物生长之谜，植物的花瓣数的秘密可用斐波那契数列解开.

3　有名的形数数列

形数数列是一个很古老的数列. 数学家创造性提出形、数这些重要的数学概念，为研究数列提供了形象化的工具. 我们非常钦佩古代数学家巧妙借用形象的图形去研究数列，概括数列的特征，方法绝妙，美轮美奂. 古希腊数学家用点或小石子表示数，提出三角形数、正方形数、五边形数、六边形数等，得到相关的数形数列.

如 1,3,6,10,…,形成三角形数的数列；1,4,9,16,…,形成正方形数数列；还有五边形数的数列……

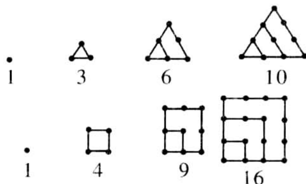


图 2-3

这些形数数列形象具体，意义明确，趣味无限. 借助于毕达哥拉斯的形数，还可发现曾发现过的三角形数性质：任意两个连续三角数的和是一个正方形数，即

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=(n+1)^2.$$

公元 500 年，印度数学家阿耶波多也对“形中之数”进行研究，发现了三角形数列、正方形数列的结果，但不是从单个多边形数、各种多边形数之间的关系，他主要从三角形数列等方面进行研究. 如三角形数列前 n 项和的计算，一般项为 a_n，由“任一正方形数等于相邻两三角形数之和”得①

① 徐品方，等. 中学数学简史[M]. 北京：科学出版社，2007:65-67.

$a_1+a_2=2^2$,

$a_2+a_3=3^2$,

…

$a_{n-1}+a_n=n^2$.

两边分别相加,得

$a_1+2(a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})+a_n=2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2$,

因为 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$

$$=\frac{\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1\right]+a_1+a_n}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$,

其中 $a_1=1,a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

公元 100 年,古希腊数学家尼克马修斯在《算术入门》中研究"形中之数",得到著名的"奇数列分组问题":把奇数列

1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,…

从第一项起按如下法则重新组合,得到新的数列

1,3+5,7+9+11,13+15+17+19,…

那么,这数列的每一项等于它所含奇数个数的立方:

$a_1=1=1^3$,

$a_2=3+5=2^3$,

$a_3=7+9+11=3^3$,

$a_4=13+15+17+19=4^3$,

…

新数列一般项 a_n 由 n 个奇数和构成. 组成 a_n 的第一个奇数是所有奇数数列中的第$\frac{n(n-1)}{2}+1$ 个,即

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+1=\frac{n(n-1)}{2}+1.$$

a_n 中最后一个奇数是$\frac{n(n-1)}{2}+n$.

于是，a_n 中第$\frac{n(n-1)}{2}+1$ 个奇数是

$$2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+1=n^2-n+1,$$

第$\frac{n(n-1)}{2}+n$ 个奇数是

$$2\cdot\left\{\frac{n(n-1)}{2}+n-1\right\}+1=n^2+n-1.$$

因此，$a_n=\frac{1}{2}(n^2-n+1+n^2+n-1)=n^2$.

4　自然数幂和，数列求和的瑰宝

自然数幂和是数列历史上的瑰宝. 观察巴比伦的泥版书上

$$1,2^2,3^2,4^2,5^2,6^2,7^2,8^2,\cdots$$

的和，这是历史上记载最早的、最有名的自然数平方求和. 研究阿基米德等比数列求总和的公式，学习其抛物线图形求积法求自然数平方和的方法：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

欣赏希腊数学家尼克马克非常有意思的结果：自然数的立方和等于平方数. 即

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(2n-1)^3=(1+2+3+\cdots+n)^2.$$

印度人从实例中知道，1 至 n 的平方和、立方和公式. 11 世纪，凯拉吉运用数学归纳法证明了下列公式①：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

---

① 徐品方，等. 中学数学简史[M]. 北京：科学出版社，2007：35-36.

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

古巴比伦泥版书也披露了,巴比伦人知道了如下数列求和的方法:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1+2+2^2+\cdots+2^9=2^{10}-1,$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{2n+1}{3}(1+2+3+\cdots+n).$$

研究阿拉伯学者 *Alhazen*(约 965—1038)自然数幂和公式,发现自然数的四次方和的求和公式:

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n.$$

查阅印度的波罗门笈多(约 628)、马哈维拉(约 850)、巴斯卡拉(约 1150)以及阿拉伯的阿尔·卡希(? —1436)都可得到自然数的二、三次幂的求和公式的相关资料,并欣赏自然数幂求和精彩过程. 研究中国沈括的"刍童垛"、杨辉的"四隅垛",看看如何从《梦溪笔谈》"刍童垛"可以导出杨辉(约 1300)"四隅垛"公式. 朱世杰在《四元玉鉴》关于求自然数幂和精彩思路,巧妙解决了

$$\sum_{r=3}^{n+2} r^3 = 23409,$$

并得到求立方和的方法:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+17^3=23409.$$

北宋时期数学家沈括(1031—1905)有"隙积术",即"堆垛术",南宋末期数学家杨辉有"垛积术",朱世杰《四元玉鉴》有"招差术",都是处理高阶等差数列求和的问题,发现、证明了高阶等差数列求和公式:

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p).$$

结合立体图形,形象揭示 $p=1,2,3,4,5$ 时求高阶等差数列的茭草垛、三角垛、三角形垛、三角撒星形垛、三角撒星更落一形垛公式的方法. 清代数学家顾观光评价:"堆积之术详于杨(辉)氏,朱(世杰)氏二书,而创始之功,断推沈氏."惊叹中国历史上的"堆积之术"在解决高阶等差数列求和中的重要作用,以及对人类思维的重大贡献.

另外,关于自然数幂和问题为何这么有魅力,吸引那么多数学家的关注? 这些都是非常有趣的事情. 1673 年,莱布尼兹在一封信中提到了用差分方法解决了自然数立方和问题,并把这一发现归功于法国数学家穆顿(1618—1694). 陈世仁(1676—1722)也获得了自然数立方和公式,他的"平尖、方尖、再乘尖" 将自然数一、二、三次幂和统一起来. 自然数幂求和问题相当有吸引力,曾引起了诸如帕斯卡、欧拉、雅各布·伯努利、关孝和等许多知名数学家的关注. 特别是,雅各布·伯努利用不完全归纳法给出了自然数幂和的一般公式,但必须借助数表、系数进行,计算甚为繁琐. 还传说,在一次数学擂台赛上,伯努利用了仅 7 分半钟就算出从 1 到 1000 的 10 次幂和的值. 他的计算能力超出常理,这事真令人难以置信. ①看来,寻找较为简洁的自然数幂和公式成为当今数学界和数学爱好者关注的焦点,这也是对我们学生提出了挑战.

---

① 汪晓勤. 自然数幂和公式之历史发展[J]. 中学数学教学参考,1995(5).

第四节　概念的演变:函数的进化[①]

凡此变数中函彼变数,则此为彼之函数.如直线之式为:地=甲天⊥乙($y=ax+b$),则地为天之函数.[②]

函数是微积分学中的重要概念.人们对变量认识的深刻程度影响着函数概念的理解和掌握.人们对变量的理解也不是一蹴而就的,经过了对变量的逐步认识.由于函数概念产生之前出现了许多函数解析式,于是乎有了人们对"函数就是解析式"肤浅的认识.随着对函数概念的深入研究,人们终于发现,函数的解析式不是唯一的,或者某些函数根本不存在解析式,函数的本质乃是变量间的对应关系,借用集合、对应进一步给出科学的函数概念.历史文化的传承,丰富了函数的内涵.微积分中的主要研究对象是函数.函数概念是数学中的重要概念.函数概念为函数性质的研究、微积分的发展都起到重要的作用.解析几何的建立促进函数概念的形成,不仅为天文学家和物理学家提供计算距离、时间、速度和各种物理常数的公式,而且还为探索种种运动规律提供了有力工具,教给人们如何依据已有的经验去预测未来的事物,从而能进一步获得自然界的科学知识,从千姿百态的现象中总结出反映本质的规律.我们研究函数概念,不仅可以了解人类的社会活动如何促进函数概念的形成,而且还可以发现函数概念是如何形成、发展的.在那以后(运动进入数学)的二百年的时间里,函数概念几乎占据所有工作的中心位置.

1　变量:奠定函数概念的基础

函数概念源于变量的产生,而变量观念源于实际问题,其历史渊源流

---

① 此节发表于《中学数学教学参考》2013年第1－2期,有删改.

② 王青建.函数概念[J].大连教育学院学报,1999(3).

长，至少可追溯到古希腊时期. 阿基米德在《论数砂》中研究如下数列

$1,\ 10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ \cdots$

$0,\ 1,\ \ 2,\ \ \ 3,\ \ \ 4,\ \ \ \cdots$

他已经发现了幂 10^n 与指数 n 间的关系. 这里隐含着变量观念. 在古罗马时代，丢番图对不定方程整数解的研究，也有变量的观念. 马克思认为，函数概念源自于对代数方程的研究. 人类很早就有了变量观念的萌芽，可能处于懵懵懂懂状态. 到了 14 世纪，法国的奥莱斯姆对变量的认识提高了许多. 他画出相关图形，如图 2－4，以表示随时间 t 而变化的变量 x，并把 t 称为经度，而把 x 称为纬度. 经线与纬线把连续的运动与几何图示联系起来.

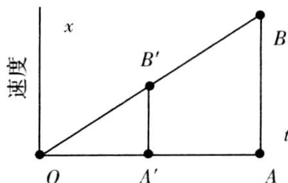


图 2－4

伽利略认为，初速为 0 自由落体运动是加速运动，其经过的距离与其所用时间的平方成正比，若沿同高度但不同坡度的斜坡平面下滑的物体，其下滑的时间与平板的长度成正比. 伽利略对运动进行研究，其成果中有了运动，变量进入数学. 后来，开普勒(1571—1630)提出关于行星运动的定律；伽利略提出落体定律和惯性定律；牛顿总结出力学运动三大定律：

(1)行星运动的轨道是椭圆，太阳位于该椭圆的一个焦点；

(2)由太阳到行星的矢径在相等的时间内扫过的面积相等；

(3)行星绕太阳公转周期的平方，与其椭圆轨道的半长轴的立方成正比.

这些都离不开运动，自然而然也就有了变量观念. 地球的经纬度精确地测定，准确时钟的制造，在大海中船只航行的位置，于是促进了对天体运动的深入研究；流体以及物体在流体中运动规律探讨，利于船舶的改进；弹道学或抛物体运动的研究，利于炮弹的准确发射. 人们研究各种各样的运动，但最基本的问题是：一是已知路程求速度；一是已知速度求路程. 在等速运动的情况下，用初等数学解决这两个问题：速度＝路程÷时间；路程＝速度×时间. 另外，17 世纪人们还面临着变速运动，数学如何描述变速运动

中时间、位置和速度之间的复杂关系，变量首先成为当时人们面对的问题.

变量观念也离不开人们对动点轨迹的研究，在描述点运动的曲线时使用变量. 1637 年，法国数学家、解析几何的创始人笛卡儿用坐标描述点时，也采用变量的观念，利用横、纵坐标间的互变关系的曲线方程去刻画物体运动轨迹. 在其著述《几何学》中，把变量引入数学，他已经注意到一个变量对于另一个变量的依赖关系，且这种关系可以用包含这两个变量的方程式表示出来. 笛卡儿的工作已经孕育了变量观念，以及函数概念. 用变量描绘动点的轨迹不仅是思想、方法上的突破，更重要的是出现了变量观念，产生函数概念的萌芽. 恩格斯指出："数学中转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了."

2 解析式的讨论，深化函数概念

尽管当时发现、提出了各种函数式，但对函数概念的认识还是极其肤浅的. 当时，人们天真地认为，函数的标准就是有解析表达式. 从数学的确定性来说，有解析式表达函数是正当的要求.

1698 年，约翰·伯努利认为，函数是由变量 x 和常数构成的式子. 1718 年，他又提出一个自认为较规范的定义，一个变量的函数是指由这个变量和常量以任意方式构成的一个量.

1797 年，拉格朗日认为："所谓一个或几个量的函数是指任意一个适于计算的表达式，这些量以任意方式出现在表达式中，表达式可以有也可以没有其他一些被称为具有给定和不变的量，而且数的量值可取所有可能的量值."因此在函数中，我们仅考虑那些假定变化的量而不是常数.

欧拉在《无穷小分析引论》中给出了函数定义：把凡是可以给出"解析式表示"的，通称之为函数. 关于变量的函数应该是一个解析表达式，它是这个变量和一些常数以任何方式组成的. 并认为，他的"解析表达式"表示是与代数运算或超越运算联系的由符号表示的量或数的表示式. 欧拉把变

数和常数之间由加、减、乘、除、开方、三角、指数、对数等运算所构成的式子都叫做解析的函数. 约翰·伯努利、拉格朗日、欧拉等众多数学家交流的结果似乎是有函数就是解析式.

函数是否一定有解析式? 傅立叶、狄里赫莱、欧拉、拉格朗日等人开始了对函数的进一步探讨,他们的工作证明了当时人们对函数概念理解确实存在缺陷. 1750 年左右,在研究弦振动问题时,欧拉发现所有的解析式都能用曲线表示,但并不是所有的曲线都能用解析式来表示. [①]达朗贝尔与欧拉先后引出了"任意的函数"的说法. 在解释"任意的函数"概念的时候,达朗贝尔说是指"任意的解析式",而欧拉则认为是"任意画出的一条曲线",即手绘曲线. 现在看来,这些都是函数的表达方式,是函数概念的外延. 1822 年,名著《热的解析理论》认为:"通常,函数表示相接的一组值或纵坐标,它们中的每一个都是任意的……我们不假定这些纵坐标服从一个共同的规律;他们以任何方式一个挨一个". 法国数学家傅立叶(1768—1830)对函数概念发展影响最大, 主张函数不必局限于解析表达式,更应注意函数的本质. 欧拉、拉格朗日允许函数在不同区间上有不同表达式. 意识到原有的函数定义有些狭隘,于是相继给出了更宽泛的函数定义,消除了解析式和曲线之间所谓的鸿沟,同时也纠正了视函数为解析式的观点.

解析式是否一定唯一? 后来人们进一步研究的结果证明了有解析式时,其解析式也不是唯一的. 傅立叶等数学家证明了不仅仅周期函数,对任一连续函数在$(-\pi,\pi)$上都可以用正弦或余弦函数表示. 后来著名的天才数学家柯西发现,即使简单函数其表达式也不唯一,如

$$\begin{cases} y=x, & x\geqslant 0 \\ y=-x, & x<0 \end{cases} \text{ 和 } y=\sqrt{x^2}$$

是同一函数. 看来,函数解析式唯一的论断是站不住脚了. 傅立叶也认为,有限区间上未必有表达式或唯一表达式. 1822 年,傅立叶发现某些函数可用曲线表示,也可用一个式子表示,或用多个式子表示,从而结束了函数概

① 龚升,张德健. 微积分五讲[J]. 数学传播,2006(4).

念是否以唯一一个式子表示的争论，把对函数的认识又推进了一个新的层次.

3 变量间的对应：把握函数概念的精髓

由于函数概念在微积分中的重要地位，函数概念的涵义不明确. 认识解析式的形式，明确了集合间对应关系，也体现出人类对函数关系认识的逐步深化，以及对客观世界规律的理解和掌握. 因此，函数概念在微积分产生后较长一段时间里一直颇受争议. 刚开始研究函数概念时，人们发现并把握住两变量间的关系，但变量间的相互关系并不是函数的本质. 函数的本质是两个量之间的对应关系. 1755 年，欧拉提出了函数的定义：如果某些变量以如下方式依赖于另一些量，即当后面变化时，前者本身也发生变化，则称前一些量是后一些量的函数.

1821 年，柯西引入自变量，并给出函数的定义：当变量之间这样联系的时候，即给定的这些变量中的一个值，就可以决定所有其他变量值的时候，人们通常想象这些量是用其中的一个来表达的. 这时这个量就取名为自变量，而由这个量表示的其他量就叫这个自变量的函数. 从定义中发现，两个量间的变化的关联性是模糊的、不清楚的. 函数重要的不是变量影响函数值，而是变量间的对应关系.

1834 年，罗巴切夫斯基认为，x 的函数应该是这样的数，它对于每个 x 都有确定的值，并且随着 x 一起变化. 函数值可以由解析式给出，也可以由一个条件给出. 这样的条件提供了一种寻求全部对应值的方法，函数的这种依赖关系可以存在，但仍然是未知的. 从罗巴切夫斯基的函数定义中，我们发现了对应关系. 尽管如此，但对应的涵义还是很模糊，不清晰.

1837 年，狄利克雷认为，变量间建立怎样的依赖关系，是按照一种规则还是多种规则对应，这无关紧要，重要的是变量间的对应关系. 于是，他这样定义：如果对于 x 的每一个值，y 总有完全确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数. 狄利克雷给出的函数定义是极其经典的. 该定义指出了，函数定

义域和变量间的对应关系是它的核心，是函数定义的本质规律. 这个定义是一个科学的函数定义. 也与中学的函数定义相近. 由此定义，人们便不难理解狄利克雷函数：

$$y=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数；}\\ 0, & x\text{ 是无理数.}\end{cases}$$

它确定是一个函数.

4　元素间的关系：函数概念的发展

函数概念的一大突破是在德国数学家康托尔的集合论创立之后，数学家们开始用“集合”和“对应”的概念给出了近代函数定义，并通过集合概念，把函数的对应关系、定义域及值域进一步具体化. 1874 年，康托尔给出了函数定义：若在变量 y 的集合与另一变量 x 的集合之间，有这样的关系成立，即对 x 的每一个值，有完全确定的 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数.

美国以维布伦为代表的数学家给出函数的集合定义：若对集合 M 的任意元素 x，总有集合 N 确定的元素 y 与之对应，则称在集合 M 上定义一个函数，记为 $y=f(x)$.

元素 x 称为自变量. 这一定义被人们一直沿用至今. 所以，著名的数学家庞加莱在 1900 年的国际数学家大会上宣布：“由于有了集合论，现在我们可以说，数学的完全严格性已经达到了.” 当人们都认为集合论为数学奠定可靠逻辑基础时，集合论却出现了危机，集合悖论却使数学陷入了困惑的境地.

豪斯道夫用“序偶”来定义函数，其避开了定义不明确的“变量”、“对应”概念：设 f 是 X 与 Y 的关系，即 $f:X\times Y$，如果 (x,y)，$(x,z)\in f$，必有 $y=z$，那么称 f 为 X 到 Y 的函数. 虽然函数的现代定义与经典定义只差几字，但在概念上出现重大发展，可以说是数学发展史上的一次重大转折. 近代的泛函分析就是这种转折的标志，它研究的是一般集合上的函数关系.

5 函数的传播,数学文化的传承

1673 年,德国数学家莱布尼茨提出"函数"(Function)概念,并用 f 表示. 1714 年,莱布尼兹在《微积分的历史和起源》中用"函数"术语表示依赖于一个变量的量. 函数概念的形成和建立过程中,许多数学家付出了努力,作出了自己的贡献,如奥莱斯姆、开普勒、伽利略等为函数概念的孕育和诞生做了关键的铺垫和启示. 欧拉给出的函数定义突出了函数依赖变化的特点,被认为是科学函数概念的雏形. 笛卡尔、费尔马、莱布尼兹、约翰·伯努利、达朗贝尔、柯西、罗巴契夫斯基、狄里克雷、黎曼、康托尔、豪斯道夫等人的努力推动了函数概念的发展. 其中一些数学家为函数定义作了里程碑式的工作.

函数概念传入中国,要追溯到 1859 年. 当时李善兰与英国传教士伟烈亚力合作将"function"译为"函数",并给出函数定义:"凡此变数中函彼变数,则此为彼之函数. 如直线之式为:

地=甲天⊥乙, 即 $y=ax+b$

则地为天之函数."[①]如此的言简意赅. 这样,函数概念开始了广泛的传播,也为近代数学在中国的发展提供前提条件.

① 王青建. 函数概念[J]. 大连教育学院学报,1999(3).

第三章　数、形互补：文化的融合

第一节　点的文化：历史纪念碑

> 我们认为完全了解了点，它在人类作为一个艺术的、洞穴绘图动物的生涯中，一定出现得很晚．拉姆霍勒斯曾想要“为那些把数学上的‘点’做了最高类型的抽象的无名数学发明者竖一座纪念碑”．①

“点”的发明历史漫长而悠久．英国的数学物理学家拉姆霍勒斯曾提议，要“为那些把数学上的“点”做了最高类型的抽象的无名数学发明者树一座纪念碑”．欧几里得认为“点是既无大小也无长度的”；笛卡尔及费尔马把点视为数，发明“点的坐标”；高斯建立复平面上的点；康托发明可数点集和不可数点集；直至今天一些专家所作、所说的神秘“点”．“点”由他们，我们还记得的发明“点”的数学家，还有许多我们根本没听说过的，在某种意义上是被忘却了的人，是他们丰富了数学上的“点”的历史．现在，有人可能忘记了“点”及“点”的意义，可能有人认为自己完全了解了点．究竟谁发明了点，事实上，可能我们谁也不知道．但能看到人类数学活动中留下点的许多文化痕迹，以及点发展的历史轨迹．数学上“点”出现后，我们看到，数学不断地向抽象和精确两个方向发展，“点”继续发展形成更抽象的数学概

① Bell. 数学精英[M]. 徐源，译. 北京：商务印书馆，1991：13-14.

念.点的发展历程体现人类探究思考的过程,作为最简单的模型"点"去刻画物体的运动规律,等等.点的一切不断折射出人类的热情和执著,体现出人类对点的欣赏.徜徉在点的历史画卷之中,我们看到前人绝妙的思维和探索精神,欣赏点的美景时,不禁沉醉于点的历史文化中.

1 早期的点:人类的抽象

点的历史悠久.点是构造图形的最小的几何元素,点在几何学中只表明位置但不具备面积和方向.我们对点也并不陌生.阿基米德曾说:"如果给我一个支点,我可以撑起整个地球."毕达哥拉斯认为:"点是只有位置而没有大小的单位."柏拉图认为:"点是直线的开端或点是不可分割的线."毕达哥拉斯学派研究发现了"形数"和"点"的奥秘,形数是使用某种三角点式来表示,用点排成图形.毕达哥拉斯很会用"点"表示数,如三角形数、正方形数、五边形数.三角形数、正方形数、正五边形数等相当形象地、具体地、直观地用点阵展现它们的特征.

古希腊数学家对点的认识精彩纷呈.芝诺相信,几何上的点有大小但不能分.亚里士多德认为点是不可分的,只占有位置,尽管聚集了无数个点但还是聚不成能分的东西,点不能连成像线这类连续的东西.①亚里士多德认为,点、线、面各是线、面、体的分界,而有三维的是体.

古埃及的纸草书和巴比伦的泥版书也出现了点,但点的符号表示却等到1202年才完成,那时斐波拉契用小写字母表示点.到了1801年,人类改用大写字母 $A,B,C\cdots\cdots$ 表示点,是由法国人想到的.从1202年到1801年,点的符号表示从小写字母改为大写字母,这一点就花了六百年时间.②人类对点的认识经过漫长的时间,内涵才逐渐丰富起来.

2 数轴上的点:数的形象化

数有实数、复数.无论是实数还是复数,都离不开点.如实数,16世纪,

---

① [美]M. Kline.古今数学思想(1)[M].张理京,译.上海:上海科学技术出版社,2002:61.

② 徐品方,等.数学符号史[M].北京:科学出版社,2008:285-286.

当人们理解负数和无理数遇到困难时，就想到了图形来表示数量. 虽然不能给无理数有说服力的定义，但数学家庞贝利、斯蒂文都认为，数轴是一个有方向和单位长度的直线，正数在原点 0 右边，负数在原点 0 的左边，数与数轴上的点建立一一对应. 这样数轴上一个点表示唯一的实数，任何实数都能在数轴上找到唯一的点来表示. 数轴上表示有理数的点是有理点，其余的点是无理点. 戴德金尝试用分割定义无理数. 他讨论数轴上点的连续性、稠密性，通过用分割研究无理数. 他认为，数轴上的有理点构成充满间隙的直线数轴上的间隙点就是无理点. 戴德金在数轴上 P 点砍一刀，数轴被分为两截，点 P 在哪一段上？若不在左边，就在右边. 点表示数，数用点表示. 即把数轴上的有理数分成两个集合 A、B，其中 A 中的每个有理数都比 B 中的每个数小，那么 $\{A,B\}$ 就称为有理数的一个分割. 如图 3－1，分割产生了空隙，得到一无理点，即无理数，而如图 3－2 没有空隙，这一分割点就是有理点，即得到有理数. 这就是有名的戴德金分割理论.



图 3－1



图 3－2

实数是通过分割点（无理点）去解释无理数. 而复数仍利用点去解释. 许多数学家，如吉拉尔、韦塞尔、高斯、欧拉、沃利斯等，都想方设法去解释复数概念. 其中，高斯认为，复数应与平面中的点对应，横轴是实数轴，竖轴称为虚轴，表示纯虚数，复数 $a+bi$ 用平面上的点 (a,b) 表示. 高斯的精彩解释，从几何表示法中人们看到 $\sqrt{-1}$ 直观意义完全有了依据……只要把 $+1, -1, \sqrt{-1}$……称之为向前一、反向一和侧向一，那么这层朦胧而神奇的色彩即可消失.

3　欧氏几何中的点：数的联想

欧氏几何认为，点只有位置没有大小，把线定义为向一点看齐的东西. "从任意一点到任意一点作一直线是可能的". 点的历史极其悠久，内涵丰富多彩，人们对点的认识从什么时候开始？无从考究，但我们可以从点的

历史轨迹上发现人类活动的痕迹. 欧几里得的《几何原本》,可以说点奠定了几何的基础,离开点将寸步难行. 线段的中点、垂线的垂足、三角形的顶点、外心、内心、垂心、重心、旁心以及多边形的顶点,都不可能脱离点而形成概念. 由三角形的五“心”引出许多有趣的命题:三角形的垂足、三边中点、垂心与三顶点连线段的中点共九个点在同一圆上. 这也展示了数学家深邃的洞察力,以及对几何的深入分析、思考. 还有尺规作图是《几何原本》中的重要内容,而尺规作图也是首先确定点;两点决定一直线;两点之间线段最短等. 在给定直线上作一等边三角形时,也要确定点,找交点. 总之,由点确定线、线确定面,面才能确定立体图形. 欧几里得以点为基础,通过点、线、面形成几何图形,集中生产实践得到的几何知识,以公理化方法进行编排,撰写了《几何原本》这部不朽的巨著,“点”是功不可没.

4 解析几何中的点:数对的奇思妙想

要用代数方法研究几何图形,必须沟通代数与几何之间的联系,而代数与几何各自压缩到最基本的概念,分别是数和点. 于是,首先要建立数和点的联系. 如何用数表示点的位置呢? 这就需要有一种联结数与点的空间位置的特定数学结构. 用一个数对或数组确定平面. 或空间各点间的相对位置的方法,叫做坐标法,它的结构叫做坐标系. 通过点可以去刻画直线、面、曲线等图形的位置关系;点运动形成线;再研究微积分:连续、离散、间断点等都与点有关,还有区间的端点,等等. 费尔马最熟悉韦达用代数解决几何问题的方法,也可能把阿波罗尼奥斯的圆锥曲线直接翻译成代数的形式. 他考虑任意曲线及其上一般点 J, J 的位置用 A, E 字母定出:A 是从点 O 沿底线到点 Z 的距离,E 是从 Z 到点 J 的距离.[①]如图 3-3,他的 A, E 就是通常的 x, y. 他用的是斜坐标系,没有纵坐标. 费尔马说过他的原理:“只要在最后的方程里出现了两个

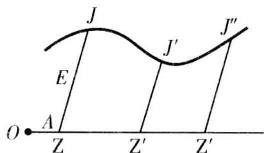


图 3-3

① [美]M. Kline. 古今数学思想(2)[M]. 朱学贤,等,译. 上海:上海科学技术出版社,2002:2.

未知量，我们就得到一个轨迹，这两个量之一，其末端就描绘出一条直线或曲线.”对于不同位置的 E，其末端 J，J'，J''……就把线描出. A，E 其实就变量 x，y. ①

笛卡尔将平面上的点放在斜坐标系中，如图3-4，引出点的坐标，确定点与数对(x,y)间的联系，最后得到 x，y 二元不定方程，用代数方程表示曲线，图形代数化，代数解析化. 通过对方程的讨论来给出曲线的性质. 笛卡尔和费尔马发明的解析几何，推广到三维空间，笛卡尔把三维空间中的点与有序实数组(x,y,z)之间建立对应关系，这样，点的坐标所满足的不定方程，这些满足条件的点集得到曲线，通过曲线去刻画、研究方程.

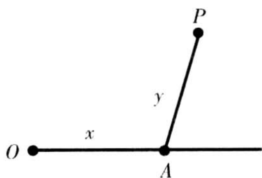


图 3-4

轨迹的确定离不开点，如到一个定点的距离等于常数的轨迹是圆；到两个定点的距离之和等于常数的轨迹是椭圆；到两个定点的距离之差的绝对值等于常数的轨迹是双曲线；等等. 有关曲线均可定义为符合某条件的点的轨迹.

5　康托点集理论：颠覆常识的思维

点集是康托集合论研究中谈得最多的对象. 他借助对应通过点集阐述“部分等于全体”的观点，如区间$(0,1)$内点的个数与$(-\infty,+\infty)$内点的个数一样多，有理点的个数远远少于无理点的个数. 于是，康托彻底颠覆了“全体大于部分”传统观念，但康托自己也不敢相信. 1874 年，他写信给数学家戴德金，“正方形上的点与它一边上的点一样多”这是不可能的，但证明是对是错不容易. 三年后，他得到相反的结论，并证明了“正方形上的点与其一边的点一一对应”，即可以说，正方形上的点与其一边有同样多的点. 康托把这一结论告诉了戴德金后说：“除非我从你这位老朋友口中得悉证明是对或错，否则我的心情难以平静下来. 在你未曾证实这回事之前，我

---

① ［美］M. Kline. 古今数学思想(1)［M］. 张理京，译. 上海：上海科学技术出版社，2002：61.

只能说,我看到,但我不相信!”事实上,康托自己仍将信将半疑.[①]由此发现,“点”在发展历史过程始终在数学舞台的中心,闪耀着人类智慧的光芒.

第二节 经典三角:两千年文化[②]

如我想象的那样,我最初把角的正弦和正切这样引入了代数领域中,即使得我们能够像其他的量那样来处理它们,并顺利地进行各种各样的运算.[③]

——欧拉

三角是数学中的重要内容,包括三角线、全弦长、正余弦、正余切,还有大量的经典定理.其中三角的弦表经历过漫长的发展历程,由全弦长到半弦长,从弧的半弦至角的半弦,体现人类思维的巨大飞跃.了解三角的文化、历史,理解三角知识,认识到三角文化发展的继承性、发展性和延续性,意识到三角是人类对宇宙充满好奇与探索的结果.重视三角文化、历史对于了解三角的发展历程具有重要的意义.探究三角历史,丰富数学内涵,研究正、余切应用,丰富三角体验,探究三角线形成,理解三角概念,欣赏历史名题,体验三角经典.

1 源于古希腊的正弦历史悠久

现在大家所学正弦函数定义并非最初人们的研究成果.了解弦长、半弦长的历史,发现正弦的来龙去脉和其漫长的发展过程,追溯人类的正弦

---

① 萧文强.数学证明[M].南京:江苏教育出版社,1990:30-31.

② 此节发表于《数学教学研究》2009年第10期,有删改.

③ 柯仁乌若夫.三角学专门教程[M].李荣冻,译.上海:商务印书馆,1953:241—242.

概念发展进化的历程. 它是经历了从弧的弦长到弧的半弦长，从弧对正弦对角的正弦，再到比值表示的复杂的发展历程，历时近 20 个世纪，前前后后经古希腊、印度、阿拉伯、法国、德国等国家的几十位科学家经历艰苦卓绝的探索和辛勤的劳动才创造出如今的三角函数.

公元前 2 世纪，古希腊希帕恰斯把圆周分为 360°，把半径长度分为 60 等分（即直径分为 120 等分），用弧去度量角，用直径的若干等分度量任一圆心角所长弦的长度，并以符号 crdα 表示圆心角 α 所对的弦长. 如图 3－5，半径 OA 为 60 单位，crdα＝弦 AB 之长，crd2α＝弦 AC 之长. 即现在的正弦那时表示为弦 AC 的长的一百二十分之一，即 $\frac{AC}{120}$，或 $\frac{AB}{60}$. 对于定圆，希帕恰斯计算出不同圆心角所对的弦长，并以此为依据制定了弦表，现在的三角函数表，只不过他不是考虑三角形的角，也不是圆心角的度数，而是圆心角所对的弧的度数及弧所对应的弦的长度，要求出这样的弦长计算量繁重.

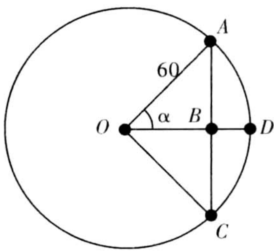


图 3－5

5—6 世纪，印度阿耶波多一改过去古希腊人求整条弦 AC 的长，采用$\angle AOC$ 所对的弧的弦长 AC 的一半即 AB 长进行计算，不难看出，半弦长相当于现在的正弦线，如图 3－6，建立半弦与弧所对全弦相对应后，半弦（长）1631 年被徐光启等人翻译为“半正弦”，简称为“正弦”.

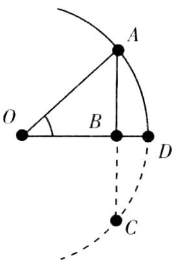


图 3－6

当时，人们为了使用方便，便造出许多弦表. 但随着不断开辟新的应用领域和高精度要求的提高，上述弦表已不够科学，需要制作更精确的弦表. 到了 16 世纪，德国哥白尼的学生雷提库斯，将弧 AD 的正弦是 AB（即半弧所对的半弦）修改为$\angle AOB$ 的正弦是 AB，并首次把 6 个三角函数定义为角的三角形函数，而不是弧的三角函数. 为了天文工作观察的需要，加大圆的半径，取圆的半径 $r=10^{10}$ 和 $r=10^{15}$，

以 10′为间隔制作三角函数表,终于得到精确到 7 位数的数学用表. 雷提库斯定义角的三角函数使得研究对象上出现了根本的转变,对拓宽后来的研究领域有非常重要的作用,这一改变使 Rt$\triangle AOB$ 成为基本的结构,而半径为 OA 的圆成为附属物,可有可无. 弧的弦到角的弦的转变,为三角函数快速发展奠定坚实基础.

2 正、余切的创立,人类思维的胜利

阿布·瓦发最早把正切、余切作为直角三角形的两条直角边的比提出来,并利用日晷仪确定了正切和余切的值. 如图 3-7,长为 a 的竿竖立在地面,对太阳的仰角为 φ,则竿直阴影的长为 $b=a\cdot\cot\varphi$.

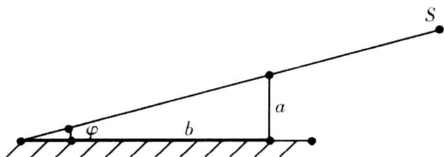


图 3-7

当取 $a=1$,确定太阳 S 高度的仰角,依次取 1°,2°,3°……时,得到影长 $b=c\cot\varphi$ 的表即余切表. 其精确度做到了到秒.

类似地,如图 3-8 他把长为 a 的竿与墙面垂直,迎着太阳,仰角为 φ,则竿的反阴影的长为 $b=a\cdot\tan\varphi$.

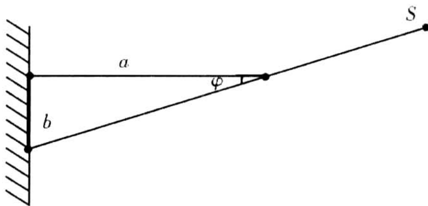


图 3-8

当取 $a=1$,确定太阳 S 高度的仰角 φ 依次取 1°,2°,3°……时,得到影长 $b=\tan\varphi$ 的表即余切表. 利用水平日晷也可制作相隔 1°的正切表. 后来,直阴影变成余切,反阴影变为正切. 利用上述事例,了解三角概念源于人类

的实践活动，三角函数表源于数学家早期的精心测量、精心计算以及制作.

3　三角线的定义，划时代的创新

关于三角函数有必要知道，有关三角函数的三角线，起源于12世纪.阿拉伯人阿布·瓦发把所有三角线都定义在同一圆上；正切、余切作为圆的切线段引入.其间，由于应用程度的提高以及和其他领域知识联系的需要，三角研究逐步向纵横两个方向扩展，经过人们几个世纪的努力，千锤百炼才得到现在的结果，并一直沿用至今.

18世纪，瑞士大数学家欧拉定义三角函数是一种函数线与圆半径的比值.具体地说，任意一个角的三角函数都可以认为是以这个角的顶点为圆心，以任意长为半径作圆后，由角的一边与圆周的交点 P 向另一边做垂线 PM 所得的线段 OP、OM、MP（即函数线）相互所取的比值，如图3－9.如 $\sin\alpha=\dfrac{MP}{OP}$，$\cos\alpha=\dfrac{OM}{OP}$，$\tan\alpha=\dfrac{MP}{OM}$等.

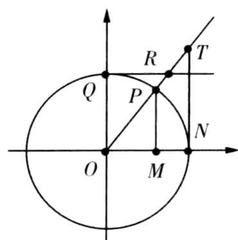


图3－9

若令半径取单位长1，那么所有的6个三角函数又可大为简化，如

$\sin\alpha=MP$，$\cos\alpha=OM$.

欧拉用小写字母 a，b，c 表示三角形的边，用大写字母 A，B，C 表示三角形的角，大大地简化了三角公式、三角运算.对此，欧拉曾自豪地说："如我想象的那样，我最初把角的正弦和正切这样引入了代数领域中，即使得我们能够像其他的量那样来处理它们，并顺利地进行各种各样的运算."

欧拉还彻底地解决了三角函数在四个象限中的符号问题，从而把各种三角公式推广到一般情况；他研究清楚了三角函数的周期性；提出了角的弧度制，并把直线段与圆弧的度量统一了起来.①

① 柯仁乌若夫.三角学专门教程[M].李荣冻，译.上海：商务印书馆，1953：241-242.

4　三角经典的定理

解三角形的理论是古代三角术发展的必然结果.随着雷提库斯从弧的正弦转变为角的正弦后,三角成为解决三角形的重要工具,成为名副其实的三角.于是,在运用三角处理三角形进而出现了许多工作经典的历史名题,如正弦定理、余弦定理、两角和差的正、余弦公式、倍角的正、余弦公式、积化和差、和差化积公式,这些名题也成为解决三角形的重要利器.

(1)正弦定理、余弦定理

正弦定理、余弦定理是数学家在球面三角学时得到的重要定理,是球面三角的副产品.在研究球面三角时,阿拉伯数学家阿尔·巴塔尼求解直角三角形时得到一个习题,还不知道是平面三角,更不知道是否有"正弦定理",并不意识它的普遍意义.正弦定理发展也不容易.阿拉伯的阿布·瓦发(940—998)在《天文学大全》中给出了平面三角的正弦定理,阿尔·比鲁尼在1030年首次加以证明.后来,法国人莱维(1283－1344)也给予证明.1464年,德国数学家雷格蒙塔努斯出版名著《论各种三角形》,这标志三角学从天文学独立出来,正弦定理在书中十分清晰地表达出来.他们给出的证明非常简单,如图3－10,已知三角形ABC,$AD\perp BC$,由$m=c\sin B=b\sin C$立即得到正弦定理:$\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$.

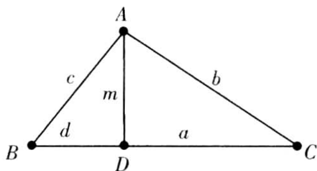


图3－10

对于余弦定理,其实早就有了萌芽.在《几何原本》中有命题:在钝角三角形中,钝角所对的边上的正方形比夹钝角的二边上的正方形的和大一个矩形的二倍.如图3－11,即由一锐角向对边的延长线作垂线,垂足到钝角之间一段与另一边所构成的矩形:

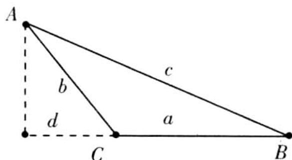


图3－11

$c^2-(a^2+b^2)=2\times ad$,

即 $c^2=a^2+b^2+2ad$.

其实,此定理的形式上与钝角时的三角形的余弦定理相似,只是没有定义余弦函数而已.说明欧几里得时代已有余弦定理的雏形.15 世纪前叶,阿尔・卡西才给出平面三角的余弦定理类似形式:

$a^2=(b+c\cos A)^2+c^2\sin^2 A$.

1593 年,韦达给出平面三角的余弦定理的另一种形式:

$$\frac{2ab}{a^2+b^2-c^2}=\frac{1}{\sin(90^\circ-C)}.$$

1627 年,斯内尔给出了余弦定理又一种形式:

$$\frac{2ab}{c^2-(a-b)^2}=\frac{1}{1-\cos C}.$$

对于余弦定理的证明,当时他们给出如下证明,现在看来还是相当容易的:如图 3-10,利用 Rt$\triangle ABD$,Rt$\triangle ACD$,立即有

$m^2=c^2-d^2=b^2-(a-d)^2$,

$b^2=a^2+c^2-2ad$.

由 $d=c\cos B$,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,即余弦定理.

(2) 两角和的正、余弦公式

两角和的正、余弦公式的历史其实相当悠久,最早可追溯到托勒密(100—178),甚至可追溯到希帕恰斯(公元前 185—公元前 125).据了解,希帕恰斯已经得到了两角和的正、余弦三角公式以及同角的正、余弦的平方和等于 1.也有资料表明,这些公式与托勒密定理有关.到底如何有关?

数学史上,记载着托勒密定理与两角和的正、余弦三角公式有关,如何关联?值得注意.设 AC、BD 为圆的直径,如图 3-12,依托勒密定理有,

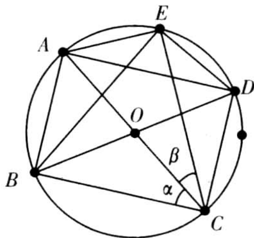


图 3-12

$AC\cdot BE=AB\cdot CE+AE\cdot BC$

$AC\cdot DE=AD\cdot CE-AE\cdot CD$.

在 Rt$\triangle BDE$ 中,$\angle BDE=\alpha+\beta$,$BE=AC\cdot\sin(\alpha+\beta)$,$DE=AC\cdot$

$\cos(\alpha+\beta)$.

在 Rt$\triangle ABD$ 和 Rt$\triangle ABD$ 中，

$AB=CD=AC\cdot\sin\alpha, CE=AC\cdot\cos\beta$,

$AE=AC\sin\beta, BC=AD=AC\cos\alpha$.

所以

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

后来，10 世纪，阿拉伯地区的数学家阿布·瓦发获得了类似于两角和的正弦公式. 世界数学史表明，人类在不同的时期在不同的地方有可能对同一规律作出类似发现，而且还是反反复复的重现.

(3)倍角的正、余弦公式

正、余弦的倍角公式是三角学中重要公式，自然是两角和正、余弦公式的特例，是不难得到的. 但还是等到 12 世纪才由印度数学家波什迦罗获得：

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$,

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

到了 16 世纪，法国历史上著名数学家韦达找到了三倍角正、余弦公式：

$\sin3\alpha=3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha$,

$\cos3\alpha=\cos^3\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha$.

韦达还把它推广到更一般的 $\sin n\alpha$，$\cos n\alpha$ 正、余弦公式. 获得这些结果后，让他无比自豪，并惊叹道，对于这些角的等分的分析包含了迄今为止无人发现的秘密. ①

到了 1569 年，雷提库斯也给出了一般的 $\cos n\alpha$ 余弦公式：

$\cos n\alpha=\cos(n-2)\alpha-2\sin\alpha\sin(n-1)\alpha$.

---

① 汪晓勤，韩祥临. 中学数学中的数学史[M]. 北京：科学出版社，2002：189-208.

英国大数学家牛顿也给出 $\sin n\alpha$ 正弦公式，是在给德国数学家莱布尼兹的一封信中提出的著名公式：

$$\sin n\alpha=n\sin\alpha+\frac{(1-n^2)n}{3!}\sin^3\alpha+\frac{(1-n^2)(9-n^2)n}{5!}\sin^5\alpha+\cdots.$$

1702 年，瑞士的著名数学家雅各・伯努利也研究正、余弦 $\sin n\alpha$，$\cos n\alpha$ 一般公式，通过不完全归纳法得出：

$$\sin n\alpha=C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha-C_n^7\cos^{n-7}\alpha\sin^7\alpha+\cdots,$$

$$\cos n\alpha=C_n^0\cos^n\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-C_n^6\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha+\cdots.$$

当然，韦达、雷提库斯、牛顿、雅各・伯努利等得到的正、余弦 $\sin n\alpha$，$\cos n\alpha$ 公式相互间是等价的. ①

(4)正、余弦的和差化积

和差化积、积化和差是三角学中重要内容，也是特别有意思的公式. 但这些公式如何获得的，许多学习者可能不知晓. 韦达在三角学方面的贡献是巨大的，提出了三角正弦的和差化积公式，并用几何方式给予证明.

如图 3－13，$\angle AOC=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，不妨设 $\alpha>\beta$，作 $BF\perp OC$，$AG\perp OC$，交 OC 于点 E，交圆 O 于点 G，再作 $OH\perp AB$，$HI\perp OC$，$BD\perp AG$，$BF=DE$. 于是，$\angle AOB=\alpha+\beta$，$\angle BOG=\alpha-\beta$，因而

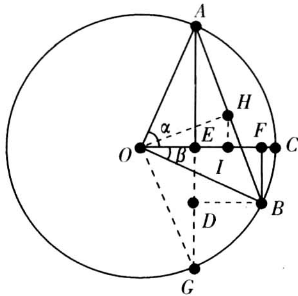


图 3－13

$$\angle AOH=\frac{\alpha+\beta}{2},\angle BOG=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$AE=\sin\alpha,BF=\sin\beta,$$

$$AE+BF=AD=AB\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

① 汪晓勤，韩祥临. 中学数学中的数学史[M]. 北京：科学出版社，2002：189-208.

而 $AB=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，

所以 $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

还有 $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，这也是韦达导出来的. 韦达还得到了积化和差的三角公式：

$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$.

还有，德国的数学家韦内尔(1468—1528)在欧洲最先独立发现积化和差的公式，当时被誉为韦内尔公式：

$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$，

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$，

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$.

依韦达的方式也可以得到如下和差化积的公式：

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

我们也可利用几何图形进行推导出来，具体方法见汪晓勤、韩祥临编著的《中学数学中的数学史》平面三角一章.

第三节　等周原理：文化的传承[1]

> 等周长的多边形中，正多边形的面积最大；周长相等的正多边形中，边数愈多的正多边形面积愈大；圆的面积比同样周长的正多边形的面积大；表面积相等立体中，以球的面积为最大.[2]

我们常见的基本不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，事实上源自于经典的等周不等式，也称为等周原理或等周问题. 所谓等周问题，是指在等周长的平面中，存在面积最大的区域. 等周问题极具吸引力，历史悠久，文化丰厚. 等周原理的历史可追溯到公元前古希腊时期的芝诺、帕普斯等哲学家、数学家. 近代，欧拉、笛卡尔、斯坦纳、伯努利兄弟、拉格朗日等著名数学家对等周问题进行深入研究，得到许多特别扣人心弦的结果. 他们的趣闻轶事沁人肺腑，他们对数学的情结镌心铭骨.

1　历史悠久的等周原理

等周问题是数学发展史上不可忽视的一类有趣问题. 它早已吸引了不少古希腊数学家. 等周问题，即求周长相等时面积最大的问题. 公元前180年左右，古希腊数学家芝诺多罗斯对等周问题进行研究. 芝诺多罗斯不同于哲学家芝诺(公元前450)，芝诺提出一系列悖论，而芝诺多罗斯出版过论著《等周原理》，可惜已失传；但庆幸的是4世纪帕普斯记载其中若干命题. 其中的定理有：

(1)周长相等的n边形中，正n边形的面积最大；

---

① 此节发表于《中学数学教学参考》2013年，有删改.

② 中外数学简史编写组. 外国数学简史[M]. 济南：山东教育出版社，1987：150.

(2)周长相等的正多边形中，边数愈多的正多边形面积愈大；

(3)圆的面积比同样周长的正多边形的面积大；

(4)表面积相等所有立体中，以球的面积为最大.

此外，帕普斯还增加了定理：在周长相等的所有弓形中，半圆的面积最大. 这些就是我们所谓的极值问题.

一直到17世纪，笛卡尔发现了等周问题的价值，如表3-1. 他研究面积为1的一些图形的周长和周长为1的一些图形的面积后发现：所有等周的平面封闭图形中，以圆的面积为最大；或所有等面积的封闭图形中，以圆的周长为最小.

表3-1

面积为1的图形的周长		周长为1的图形的面积	
图形	周长	图形	面积
圆	3.55	圆	0.0793
正方形	4	正方形	0.0625
90°的扇形	4.03	90°的扇形	0.0616
矩形(3:2)	4.08	矩形(3:2)	0.0601
半圆	4.10	半圆	0.0595
等边扇形	4.21	等边扇形	0.0564
矩形(2:1)	4.24	矩形(2:1)	0.556
等边三角形	4.56	等边三角形	0.0481
矩形(3:1)	4.64	矩形(3:1)	0.0464
等腰直角三角形	4.84	等腰直角三角形	0.0427

伯努利兄弟、欧拉、拉格朗日等也相继研究了等周问题. 他们在研究等周问题中创立了变分法.

在等周问题的研究上，伯努利兄弟作出了比较大的贡献，数学史上也留下他们的趣闻轶事. 1697年5月的《教师学报》上，雅哥布·伯努利向弟弟约翰的挑战："在给定周长的所有封闭曲线中求一条曲线，使得它所围的面积最大."若问题的解十分完满，雅格布·伯努利还愿意给约翰一笔五十

个金币的奖金. 可约翰开始过低地估计等周问题的复杂性,1697 年和 1701 年两次给出的解答都没有成功,这受到了雅哥布无情的批评. 最后,雅哥布、约翰共同提供了一个精确、漂亮的等周问题的解法. 可见,数学问题成为永不枯竭的灵感源泉.

2　无处不在的等周原理

圆形是生活常见的形状,自然界隐匿的秘密. 大自然也偏爱圆形,当我们用柔软的细绳捆一束细杆时,这捆细杆的横截面总近于圆形;向日葵的花盘,千万种美丽的花朵,都是近于圆形. 如果仔细留意一下周围,就会发现其实对于等周问题我们并不陌生. 在我们的生活中处处都有它的身影,如一个小杯子、树干,它们中都蕴含着巧妙的等周原理. 它们体现大自然的美,以及最优原理. 由此可见,等周原理真的是到处都有应用,数学来源于生活,这是非常有道理的,我们只要留意周围的事物,就会发现生活中的数学的美,圆是尽善尽美的图形.

夏秋清晨荷塘荷叶露水,晶莹欲滴;一不小心打破的水银温度计,落到桌面上珍珠般的水银,翻砂车间翻砂时溢出的铁水凝成弹子;太阳、地球、月亮、行星,都自然地形成球形或近似于球形;人或哺乳动物,头盖骨都近于球形;猫钻进干草垛身体尽可能蜷伏成球形,这一切说明,当体积一定时,球的表面积最小. 同样的,当表面积一定时,球的体积最大. 著名数学家欧拉,很小时已表现出惊人的数学才能,明白等周原理. 他向父亲提议,100 米长的篱笆围成正方形羊圈,面积能增加 25 个平方,达到 625 个平方. 处处存在优化,那里都是等周原理. 因此,我们不难理解生活中所用的输水管、输油管等都是圆柱形的. 这些现象与早期笛卡尔等周问题的研究结论高度一致.

3　等周原理的趣闻轶事

从等周问题的提出到现在,一直流传着很多有趣的事,有关于巧妙利

用它来解决难题的传说，也有因为不懂此原理而吃亏的故事，有在研究它的过程中淡泊名利，成就他人的美谈. 这一切，都为等周定理增添许多趣事.

据史料记载，某国皇后纪塔娜十分精明，曾与一部落协商，对方有意让出一块用灰鼠狼皮围住的土地. 怎样才能围出一块面积最大的土地呢？聪明的皇后先将狼皮剪成得很细很细，结成长带，然后依海岸线(直线)用长带围出一块半圆形的地，这是用这根定长的带子所能围的最大面积. 其中原委是：在等周长的所有弓形中，半圆的面积最大. 后来的卡尔法纳城就是这样在这块土地上建立起来.

无独有偶，俄国大文豪列夫·托尔斯泰笔下的巴河姆悲惨命运源自于不懂等周原理.

草原上有地主卖地的方式很特别：任何一个来买地的，只要交 1000 卢布，他从太阳上山到下山一天内，由任一点出发，再回到出发点，所围住的地就是他的；如果日落前没回来，那他寸土未得，还白丢掉 1000 卢布. 有位名叫巴河姆以为有利可图，爽快地交了 1000 卢布. 第二天，太阳刚升起，巴河姆在草原上开始跑，沿直线跑了 10 俄里，再左拐 90°沿直线走得远远的，再左拐 90°继续前. 这时，发现天色不早，只好直奔出发点. 终于回到出发点. 可惜他两腿一软，劳累过度，一命呜呼.

尽管他围住了约 86.72 平方公里的土地，即 8672 公顷. 懂等周原理的人指出，他的走法很不合理，等周长的四边形中正方形面积最大，等周长的封闭图形中圆的面积最大. 如果走正方形，围住 8672 公顷只需要走 37 公里，要少走 5 公里. 如果走圆形，围住 8672 公顷，则只需走 33 公里，大约相当于他所走的$\frac{3}{4}$.

两则故事都是与等周原理有关，明白原理的，用智慧轻松围出她的城堡；不懂原理的，贪多又命丧黄泉.

后来，欧拉进一步研究等周问题，并演绎出与拉格朗日之间的精彩故事. 欧拉收到年仅 19 岁拉格朗日的来信，提出了不同于欧拉的新颖解法，

高度地赞扬他，并谦逊地暂缓发表自己这方面成果，而让拉格朗日先发表他的论文. 欧拉回复："这是为了不剥夺应该归功于你的荣耀."拉格朗日第一篇论文《极大和极小的方法研究》为自己赢得了巨大的声誉. 欧拉也成就了后来成果卓越的拉格朗日.

4　等周定理的精彩证明

对等周问题"所有等周的平面封闭图形中，以圆的面积为最大"的研究一直进行. 虽然这个定理的结论从笛卡尔的数据验证后早已为人知，但要严格的证明却不容易. 1838 年，雅各 · 斯坦纳以几何方法证明：若答案存在，答案必是圆. 但证明过程中出了一些差错，正是因为差错，引发了许多人的兴趣，不断地推动、完善等周问题的研究.

斯坦纳的证明思路是：设 Φ 是周长一定而面积最大的图形，只要证明 Φ 是一个圆即可. 以下分三步来完成.

第一步，用反正法证明 Φ 是凸图形.

第二步，用反正法证明平分 Φ 的周长的弦也一定平分其面积.

第三步，证明平分周长、面积的弦是直径，从而 Φ 为圆.

后来发现，斯坦纳的证明有瑕疵，真是美中不足. 证明时利用"在周长相同的一切封闭曲线中存在着一个面积最大的图形"的假设. 但瑕不掩瑜，他的证法仍是极巧妙和值得借鉴的. 后来，其他数学家完善了斯坦纳的证明，其中凹的封闭曲线在"翻折"后凹的部分成为凸的图形，增加了面积，完全凸和对称的图形是圆. 这还不算是等周定理的严格证明. 到了 1901 年，数学家赫尔维茨用高等数学的方法给出一个纯解析证明.

第四节　圆锥曲线:思维的结果①

《圆锥曲线论》内容广泛,解释详尽,研究之深刻,几乎网罗了当时已发现的圆锥曲线所有的性质.千余年来,圆锥曲线毫无进展可言,后人几乎无插足之地.

圆锥曲线是数学研究和学习的重要内容,也是研究宇宙世界的重要模型.圆锥曲线历史悠久,底蕴深厚.神奇、巧妙、有趣的圆锥曲线浸润着人类无穷的智慧.两千多年来,从截面圆锥曲线到绘制圆锥曲线,再到坐标圆锥曲线,一路走来,谱写着绚丽的华章,展现着优美的形态,那悠久的历史、淳厚的文化,仿如陈年美酒,让人啧啧叫好.品味圆锥曲线的历史篇章,回味圆锥曲线的经典历史,体验圆锥曲线的浑厚文化,把握圆锥曲线的丰富背景,惊叹圆锥曲线的广泛应用,尝试圆锥曲线独特的方法,领悟圆锥曲线的真、善、美.美妙的曲线,生动的情境,趣味的曲线,精彩的运用,在圆锥曲线得到充分展现.圆锥曲线中蕴涵的历史文化,正好体现数学是人类文化的重要组成部分的思想,也体现了数学在人类文明发展中的巨大作用,也充分体现出数学文化是值得我们学习、体验与品味的.

1　圆锥曲线中的希腊神话

圆锥曲线与古希腊神话、尺规作图密不可分."化圆为方、三等分任意角、倍立方"是困扰古希腊数学家主要三大尺规作图问题.这些饶有趣味的尺规作图问题一直困惑着数学家.还由此演绎出许多神话,色彩神秘,同时也为圆锥曲线增添了较多情趣.

关于倍立方,有各种各样的传说.但无论何种传说,都离不开当时古希腊的瘟疫.埃拉托色尼在《柏拉图学说》中这样叙述:传说,神通过神谕对得

---

① 此节发表于《数学通报》2012年第11期,有删减.

洛斯岛上众人宣称,为了结束当时的瘟疫,你们应尽快为神新建一个祭坛,是原祭坛的二倍. 但得洛斯人不知如何加倍但又不改变形状,只好请教柏拉图. 柏拉图说,神谕的意思是,要羞辱希腊人忽视数学,轻慢几何的态度,不在于倍积祭坛. 当时没能解决倍立方的问题,但尺规作图却获得更多的关注和重视.

此后,古希腊的希波克拉提斯为解决倍立方问题,把倍积立方体问题归结为在 a 和 $2a$ 之间插入两个等比中项 x,y:

$a:x=x:y=y:2a$,

即 $x^2=ay$,$y^2=2ax$,$xy=2a^2$,

这样,倍立方问题演变为二次曲线,即圆锥曲线问题. 圆锥曲线也就摊上神话,从倍立方的尺规作图,到古希腊神话,再到二次曲线(圆锥曲线),因而为我们增添了围绕圆锥曲线的许多相关主题.

2 截圆锥得曲线,极富想象力

圆锥曲线与圆锥的联系是古希腊几何学家,欧多克斯的门徒,门奈赫莫斯的天才发现. 截圆锥得曲线这奇妙的一截,为研究曲线提供经典的、富有想象力的思路. 针对直角的、锐角的和钝角的三种顶角形式的圆锥,用垂直于母线的平面去截圆锥,于是得到历史悠久、经典有名的圆锥曲线,当时被他称之为"直角圆锥截线、锐角圆锥截线、钝角圆锥截线",即抛物线、椭圆和双曲线,如图 3 - 14. 感到可惜的是,门奈赫莫斯仅只发现双曲线的一支.

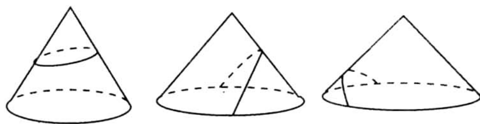


图 3 - 14

古希腊时期,许多数学家如阿里斯泰奥斯、欧几里得、阿基米德等,都

为圆锥曲线作了杰出贡献.欧几里得也很早发现“用平面去截正圆柱或正圆锥，只要平面不平行于底，其截线就是‘锐角圆锥截线’(椭圆)，其形状像盾牌”；阿基米德曾经证明了“任何一个椭圆都可以看成是一个圆锥面的截线，这个圆锥面顶点的选择有很大的任意性.”

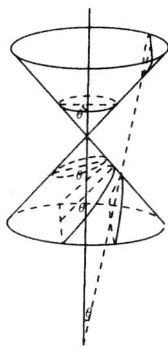


图 3-15

后来，阿波罗尼斯用三种不同位置的平面去截双圆锥得到锐(直、钝)角这三种截线，并分别命名为椭圆、抛物线和双曲线，如图 3-15.特有趣的是，他研究发现，用不平行于母线的平面去截双圆锥得到双曲线的两支.

3 巨著《圆锥曲线论》，难以超越的成就

我们研究的“圆锥曲线”，是门奈赫莫斯、阿里斯泰奥斯、欧几里得、阿基米德、阿波罗尼斯众多数学家相继努力所获得的成果.阿基米德、阿波罗尼斯与欧几里得被称为古希腊三大数学家.伴随着圆锥曲线的历史进程，阿波罗尼斯、欧几里得、阿基米德等数学家的趣闻轶事浮现在我们眼前.关于阿基米德，有故事与圆锥曲线联系起来：有史料记载，面对罗马士兵的粗暴、践踏，阿基米德发出吼叫，“不要动我的圆锥曲线！”然后又专心于曲线的研究.如图 3-16，阿基米德那淡定的形态让人终生难忘，令人赞叹……



图 3-16

早在古希腊时期，圆锥曲线理论成果已日趋成熟.阿波罗尼斯对前人的成果进行了筛选，归纳整理，完成了共八卷本，487 个命题《圆锥曲线论》的巨著.内容广泛，解释详尽，研究之深刻，几乎网罗了当时已发现的圆锥曲线所有的性质，很难有人超越这一成就.后来，曾有数学家评论说：“千余年来，圆锥曲线毫无进展可言，后人几乎无插足之地”.不得不说，这的确令人难以置信.美国的克莱茵说：“按其成就来说，它是这样一个巍然屹立的

丰碑，以致后代学者至少从几何上几乎不能再对这个问题有新的发言权，它确实可看成是古典希腊几何的登峰造极之作”.①

4　拉线作图，轨迹定义曲线

圆锥曲线的定义作图是圆锥曲线的重要特征，是定义圆锥曲线、研究曲线方程的重要工具. 我们重温哈桑、蒙特等人早期圆锥曲线的拉线作图，有助于我们理解圆锥曲线定义，体验圆锥曲线形成，赞叹人类高超的数学智慧. 早期的数学家哈桑研究了两端固定在点 A，B 的一条细绳，P 是绳上一动点. 则点 P 的轨迹是什么？不用猜，必然是圆锥曲线，如图3－17.

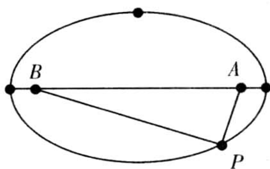


图 3－17

这是早期的数学家哈桑在《长圆》书中所讨论的“一条两端固定的定长细绳，研究拉直时笔尖所描的轨迹”. 有人称这种方法为“拉线法”. 16 世纪，意大利数学家蒙特依据这种作法定义圆锥曲线：两定点称为焦点，于是，椭圆定义为，到两焦点的距离之和为定长的动点的轨迹；双曲线定义为，到两焦点的距离的差等于定值的动点的轨迹. 如此等等. 这就是现在圆锥曲线的定义.

1604 年，著名天文学开普勒研究发现圆锥曲线的焦点与离心率，给出三种圆锥曲线的一般拉线作图法. 并深刻揭示了三种圆锥曲线的内在联系：平面截圆锥无穷远处，双曲线变为抛物线；无限大的椭圆变为圆；最锐的双曲线退缩为一对直线；最钝的椭圆是圆.

5　圆锥曲线，应用广泛

自古以来，宇宙中的天体运动历来是人类关注的中心. 哥白尼提出日心说，开普勒、伽利略等提出天体运动的圆锥曲线模型，彻底改变宇宙观.

① 张红. 数学简史[M]. 北京：科学出版社，2007：48.

从哥白尼“日心说”到开普勒、伽利略的圆锥曲线模型，描述天体运动轨迹，让我们体验到哥白尼的妙不可言的宇宙理论，联想当今探月工程、火星等宇宙探究活动，看到圆锥曲线的重大应用. 16 世纪，哥白尼提出地球绕太阳作圆周运动，接着，开普勒经过长期研究思考，认为行星运行的轨道是椭圆而不是圆. 对哥白尼行星运动轨道进行重大修正. 地球每时每刻都绕太阳依椭圆轨道运行，而太阳处于椭圆的一个焦点. 太阳系中的其他行星也依椭圆轨道运行. 伽利略也研究发现，斜抛物体时物体依抛物线轨道运动. 并提出，这些行星运行的速度增大到一定程度，它们就会沿抛物线或双曲线运行，这激发数学家对圆锥曲线的研究，极大地唤醒人们对于圆锥曲线的巨大热情. 人类开始了各种空间探险活动，如我国首颗月球探测卫星“嫦娥一号”环月球运动. 人类终于认识到圆锥曲线的重要价值，对圆锥曲线有了更深刻的认识，圆锥曲线不仅仅是平面截圆锥得到的静态曲线，而且应该是物体运动的轨迹，改变了千百年来人们对行星圆形轨道的信念.

过去，圆锥曲线似乎满足古希腊人的精神需求，且被看作是“富于思辨头脑的无利可图的娱乐”，好像没有任何实用价值，可如今，圆锥曲线得到广泛深刻的应用. 圆锥曲线的历史文化是数学中精彩的篇章，引人入胜，乐趣无穷，体现了人类高超的智慧及技巧，能激起对圆锥曲线的好奇心，也激发起对圆锥曲线的期待与探索. 人类很早就已聪明绝顶，能超越宇宙空间，能穿过时间隧道，宇宙无垠，智慧无限.

第四章　多彩的几何:灿烂的文化

第一节　三角形历史:丰富的文化

多边形的复杂性是随其边数的增加而增加的. 因此,最简单的多边形乃是三角形;当然,我们最喜欢三角形,这是因为我们对它了解得最多. ①

——波利亚

三角形是几何的心脏、奠基石. 经历无数春秋的洗礼,经受漫长曲折的历练,沉淀的三角形历史文化极为丰富. 几千年天才数学家的研究工作,以为三角形的研究已经完美,可想法过于天真,后来又陆陆续续出现三角形新的定理. 数学史家伊夫斯曾说:"直到现在还有人这样认为:关于三角形和圆的初等综合几何,希腊人已经阐述得尽善尽美了. 但实际情况并非如此. 整个 19 世纪,人们对此又进行了令人信服的深入研究. 即使现在看来,这一研究领域仍然没有到头."凭借对三角形的浓厚感情,不断地研究,三角形的内涵越来越丰富,在阿基米德三角形、黄金三角形、海仑三角形等后,拿破仑三角形、莫莱三角形等相继问世,许多三角形的新定理被发现,在商高定理、"驴桥"定理、帕普斯定理等后,斯坦纳—雷米欧司定理、许瓦兹定理、维维安尼定理等几何命题破茧而出. 许多人为三角形奉献了自己

---

① 李必成. 几何学大厦的基石——帮你学几何[M]. 福州:福建人民出版社,1986:37.

的青春和岁月，也不断地展示自己高超的思维. 恰如波利亚所说，多边形的复杂性是随其边数的增加而增加的. 因此，最简单的多边形乃是三角形；当然，我们也喜欢三角形，这是因为我们对它了解得最多. 对于三角形，我们倍感亲切，领悟三角形的精致、隽秀，体验三角形其内的文化内涵，更是领略了三角形蕴涵的人文精神.

1　文物中的三角形，展示历史悠久

从古埃及的金字塔到中国半坡出土文物，从中国的《周髀算经》、《九章算术》到西方欧几里得的《几何原本》，三角形的历史极其悠久，对其认识也极为深刻. 考察文物古迹，能发现研究三角形的人类遗迹，能体会到三角形历史的悠久，认识到人类生活、实践活动中三角形的价值. 如图 4－1，半坡出土的陶器上有三角形等精彩的几何图案，透露出某些图形逐渐演化的进程；如图 4－2，这是早在 6000 年前，我们的祖先已经认识大多数几何图形. 许多出土文物上用三角形等几何图形作为装饰图案. 观察这些考古的成果，欣赏文物中出现的三角形图案等，惊叹陶器上精致的花纹和图案，思考着远古的几何图形，追溯图形的起源. 这些为我们提供三角形研究、学习的资源.

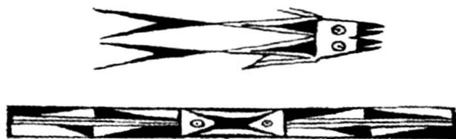


图 4－1



图 4－2

考察公元前 2800 年前古埃及的金字塔、2—4 世纪墨西哥的太阳和月

亮金字塔图片,发现四棱锥或棱台中的三角形,感受几千年前金字塔的伟大、神秘.通过文物古迹中的三角形等图形了解远古时期人类的智慧,感受人类的巨大力量.

2　三角形的符号表示,无处不在的欧拉

三角形是最简洁的图形,三条线段首尾顺次连接所得的图形,也是人类认识最早、研究最深入的图形,更是研究其他几何图形的基础,是认识世界的工具.伽利略指出,宇宙是永远放在我们前面的一本大书……这本书是用数学写的,它的符号是三角形、圆和其他图形,不借助于它们就连一个字也看不懂,没有它们就只好在黑暗的迷惘中徘徊.《几何原本》是历史上最最经典的几何专著,书中有等边三角形、等腰三角形、直角三角形、锐角三角形、钝角三角形,对三角形有无数的论述,但三角形的符号表示、字母叙述却十分不易.最早用符号△表示三角形的是古希腊数学家海伦,这是公元50年时的事,后来帕普斯、厄里岗(1634)先后也采用符号△表示三角形.符号的表示最终形成并被接受还历尽艰辛,经历了漫漫长夜,还真是不容易,直到18世纪,用字母表示三角形才由欧拉提出,用小写字母a,b,c表示三角形三边,大写字母A,B,C表示三角形三边a,b,c所对的角,用r,R分别表示三角形内切圆、外接圆的半径.到了19世纪,才由法国人卡诺(1801)用$\triangle ABC$表示顶点为A,B,C的三角形.历经几千年,三角形最终有字母、符号进行表示.这一路走来,极为漫长.连欧拉这样伟大的数学家也参与三角形的字母表示,足以见证三角形符号、字母简洁表示的作用和影响.三角形符号表示形象,字母表示简洁,这一成果是前人传承创新的结晶.这种符号表示让我们感觉到记法的简洁、优美、便捷,利于我们交流.

3　勾股定理,千古第一定理

古往今来,三角形,尤其是直角三角形,一直是人类最关注的重要图形.勾股定理是千古第一定理.在东方,赫赫有名的商高定理;夏代(公元前

21 世纪)大禹治水时用“勾于三，股修四，径隅五”的方法来构成直角三角形.《周髀算经》最早记载有勾股定理，书卷开头有周公(约公元前 1100)和商高的对话，这透露出“商高定理”的由来. 3 世纪赵爽注《周髀算经》中给出“弦图”，如图 4 - 3，一瞥就明白的勾股定理的无字证明，注释中还写道，“勾股各自乘，并之为弦实，开方除之，即弦.” 名著《九章算术》第九章《勾股》篇中专门讨论. 西方对勾股定理的研究是有传统的. 1876 年 4 月 1 日在《新英格兰教育日志》上，发表了美国前总统伽菲尔德对勾股定理的简洁、精彩的证法——后为称为“总统证法”. 如图4 - 4. 只要 3 个三角形面积的和等于梯形的面积，立即证明了 $a^2+b^2=c^2$. 他的无字证明直观、简捷、易懂，一瞥就懂.

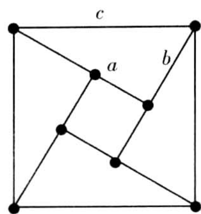


图 4 - 3

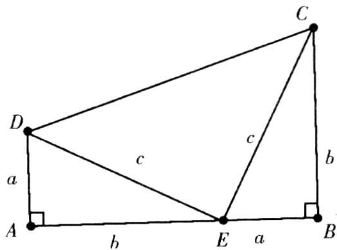


图 4 - 4

西方早期，有毕达哥拉斯定理. 这一千古第一定理勾股定理见证了人类的数学活动，展示了人类的杰出才能以及高超的智慧. 同时，人类也为之倾注了巨大的热情. 曾为庆祝第一定理的发现，古希腊宰杀一百条牛祭神，故称之为“百牛定理”. 人类历史上，保存最完整、证明最严格的是古希腊数学家欧几里得《几何原本》中关于勾股定理的毕达哥拉斯证明. 这一证明让英国哲学家 T. 霍布斯感到十分惊讶，一直唠叨着，“上帝啊！ 这是不可能的”. 他由后向前仔细阅读，检查每一章、每一个命题证明的可靠性，以及公理和公设，后来他信服了. 定理、公理、公设，一环扣一环，形成完美的逻辑链，他终于被欧氏几何征服. 这些趣闻轶事更让我们感受到勾股定理的经典，享受数学丰富的文化内涵.

4 经典的三角形，精彩的文化内涵

历史上，发现了许多赫赫有名的三角形. 我们能从中了解到三角形那

诱人的魅力.如不可思议的拿破仑三角形、莫莱三角形等,美妙无比的黄金三角形、阿基米德三角形等.对于这些三角形的学习、研究,我们心驰神往、心潮澎湃.通过研究这些久负盛名的三角形,感受到阿基米德、拿破仑、莫莱等对三角形的一片痴情,体验到三角形生动的人文内涵.

最美的三角形是黄金三角形.如图 4-5,古希腊数学家发现有一类等腰三角形,当底边与腰长的比是黄金比的三角形即黄金三角形最美,美不胜收.在黄金三角形中,以底为腰再作一黄金三角形,如此而作,得到一连串的黄金三角形,于是形成了黄金三角形套.让人赏心悦目,饱享眼福.

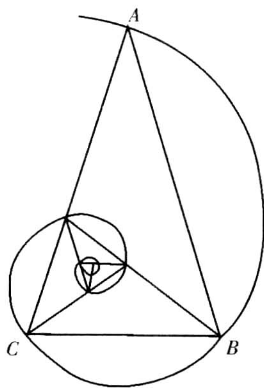


图 4-5

最古老的有阿基米德三角形,即抛物线的任意两条切线的交点 C 和切点 A,B 为顶点的三角形 ABC,如图 4-6.抛物线的弦 AB 称为阿基米德三角形的底边.对于任意阿基米德三角形,都有:阿基米德三角形底边上中线与抛物线的对称轴平行.反过来,有阿基米德定理:平行于阿基米德三角形底边的中位线是抛物线的切线,中位线与底边中线的交点就是切点.

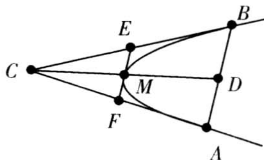


图 4-6

让人感觉不可思议的是,拿破仑还去研究三角形,居然还是等边三角形.拿破仑(1769—1821),法兰西第一帝国皇帝,早年炮兵学校读书期间喜欢数学,钟情几何.拿破仑以三角形 ABC 各边向外侧做 3 个等边三角形,这 3 个三角形的外心 A_1,A_2,A_3 为顶点刚好构成一等边三角形 $A_1A_2A_3$,称之为外拿破仑三角形,如图 4-7.拿破仑也在三角形 ABC 的内侧以各边为边做等边三角形,这三个三角形的外心 B_1,B_2,B_3 为顶点刚好又得到另一个等边三角形 $B_1B_2B_3$,称之为内拿破仑三角形,如图 4-8.真巧,内外拿破仑三角形都是等边三角形,这确实出乎人的意料,颇有点无巧不成书的感觉.

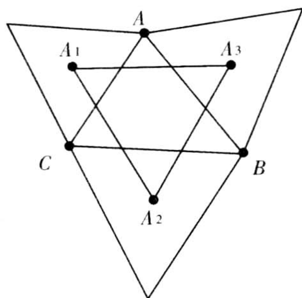


图 4-7

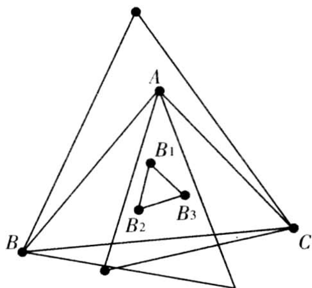


图 4-8

历史最短的有莫莱三角形. 诞生英国的莫莱(1860—1937)发现有趣的等边三角形:三角形 ABC 内角的三等分线两两相交,以三个交点 P,Q,R 为顶点构成的恰好为等边三角形 PQR,此称之为莫莱内三角形,如图 4-9;若三角形 ABC 外角的三等分线两两相交,以三个交点 P,Q,S 为顶点所构成的也正好是等边三角形 PQS,此称之为莫莱外三角形,如图 4-10. 莫莱内外三角形成为 19 世纪末全世界数学家茶余酒后的美谈. 沈康身先生引用克莱茵的话说,1899 年,欧几里得几何一项新奇定理被霍普金斯大学数学教授莫莱发现了,后来许多人发表了证明……新奇之处在于涉及角三等分线. ①直到 19 世纪中叶,没有一个数学家会去考虑这些线,因为只有可以尺规作图作出的那些元素和图形才被认为是合法的. 这确是使这个令人赏心悦目的定理姗姗来迟的原因. 莫莱三角形这一令人惊讶的结果,是几千年来发现的为数极少的精彩定理之一. 莫莱三角形引出了累累硕果. 针对莫莱三角形是等边三角形的真实性,很多人在研究、证明. 1909 年,一位叫奈拉尼恩的数学家给出了漂亮的、令人信服的证明,证法简洁,到现在为止仍是首屈一指的. 1922 年,契尔德重新发现这个证明. 1978 年,数学家奥克莱在《美国数学月刊》上撰文,现发表有关莫莱定理的论文达 150 篇之多,并认为,莫莱定理"是数学中最令人吃惊而又全然意外的定理之一,它如同

① 沈康身. 数学的魅力(1)[M]. 上海:上海辞书出版社,2006:150.

明珠一般，鲜有能与之匹敌者……这是欧几里得几何经过几千年的提炼以后，能发现的为数极少的新定理.”①

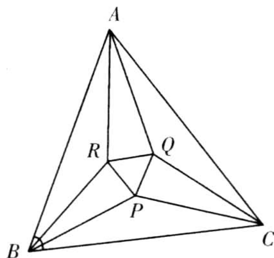


图 4－9

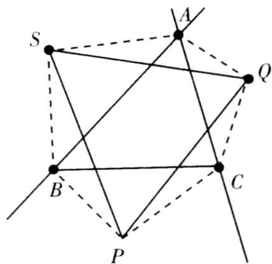


图 4－10

像这么简单的三角形，其内涵相当丰富多彩，真令人叹为观止. 谢氏三角形，是波兰著名数学家谢尔宾斯基所创造的. 连接三边中点把三角形四等分，挖出中间的三角形，对剩下的三角形如此来做，如图 4－11，这样镂空下去，得到了谢氏三角形，而让人倍感意外的是谢氏三角形的面积为零.

5　品味三角形“点、心”，感叹几何规律

三角形是数学命题的“基因库”、“衍生地”. 数学家不仅研究角、线，还研究三角形的心. 三角形的外心、重心、垂心、内心、旁心等，由“心”引出许多有趣的命题. 这也展示了数学家深邃的洞察力，以及对几何的深入分析、思考. 1765 年，著名数学家欧拉提出并证明了“任意三角形的垂心 H、重心 G、外心 O 三点共线，且 $HO=2GO$”，直线 HG 称为三角形的欧拉线. 这一定理被称为欧拉定理. 三角形的心、线的发现使人们对数学家超常的观察力佩服得五体投地.

1765 年，欧拉提出并证明命题“垂足三角形和中点三角形有同一个外接圆（六点圆）”. 法国数学家格高尼（1771－1859）和庞斯列分别在 1820 年和 1821 年先后发表三角形的垂足、三边中点以及垂心与三顶点连线段的

① 王亚辉. 数学史选讲[M]. 合肥：中国科技大学出版社，2011：21-23.

中点共九个点在同一圆上. 1822 年,费尔巴哈《三角形的一些特殊点的性质》论文发表了关于九点共圆的证明. 此外,他还提出了一个更为漂亮的定理:"三角形的九点圆与内切圆以及三个旁切圆都相切."可见,他的洞察力之如此深刻,可敬可佩! 如图 4-12,可能因这一定理的漂亮,九点圆被称为费尔巴哈圆. 在德国,把九点圆与内切圆及旁切圆的四个切点 D,M,E,F 称作三角形的费尔巴哈点. 或许因欧拉的六点共圆较早,费尔巴哈圆也被称为欧拉圆.

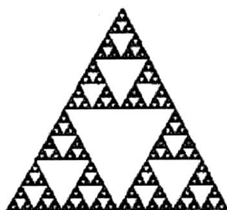


图 4-11

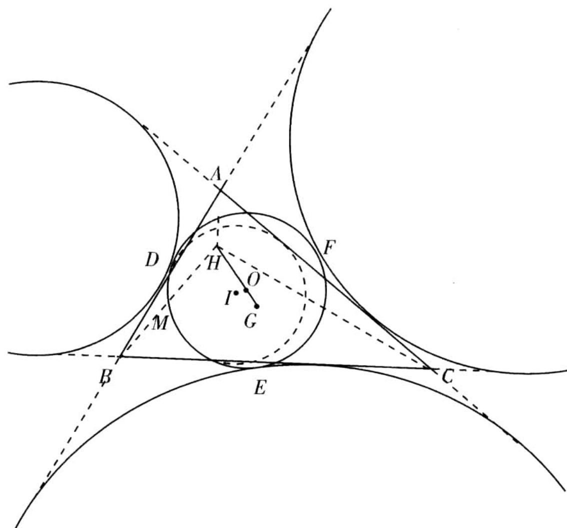


图 4-12

三角形还有格高尼点,如图 4-13. 法国数学家格高尼还发现三角形 ABC 的内切圆的三个切点 D,E,F 与三顶点 A,B,C 连接 AD,BE,CF 三线共点,这点就是三角形的格高尼点. 至于三角形的三中线、三角平分线、三高、三中垂线分别共点,这一点也不奇怪,但内切圆的切点与三顶点的连线共点,这真的非常意外.

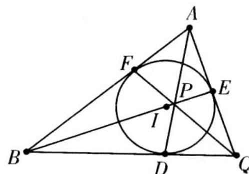


图 4-13

另外,三角形内还有费尔马点.费尔马(1601—1665)曾向意大利物理学家、数学家托里拆利(1608—1647)提出有趣问题:在已知$\triangle ABC$内找一点P,使得$PA+PB+PC$为最小,即费尔马问题.费尔马洞察到$\triangle ABC$的内角小于120°时才有解,并给予证明.有趣的是,它的解是$\triangle ABC$的正等角中心P,即$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$时,$PA+PB+PC$为最小.于是,称点$P$为三角形的费尔马点.

由费尔马问题又引出别的最小值问题:A、B、C三村庄准备联合办所学校,儿童上学人数比是3∶2∶1.那么,学校应该设在哪里才能使学生所走路程的和最少,即求一点P,使得$3\cdot PA+2\cdot PB+1\cdot PC$最小.三角形中的最小值问题激发出数学研究的热情,最小值问题成为各类热门竞赛题.

6　经典名题,三角形的魅力

三角形是最简单的封闭图形,内涵却极其丰富.泰勒斯提出了三角形内角和定理;毕达哥拉斯提出了多边形内角和定理;古希腊数学家证明平面可用等边三角形、正方形、正六边形填满等.关于三角形的经典名题,如梅涅劳斯定理、塞瓦定理、阿波罗尼斯定理、维维安尼定理、斯坦纳—雷米欧司定理等历史名题数不胜数.经典名题,脍炙人口,意义非凡,证法简洁,寓意丰富,表达明快,让人品玩称奇、惬意开怀.

最经典的历史名题之一,三角形内角和定理.它由泰勒斯提出,毕达哥拉斯学派证明.后来,这一经典名题又被一位不到10岁的法国小孩通过折叠三角形的方式得到证明,显露出其超人的数学才能.他是数学界的神童,就是后来大名鼎鼎的数学家帕斯卡,也让他父亲大开眼界.

帕普斯定理:希腊数学家帕普斯在《数学汇编》第四卷中介绍了一个勾股定理的推广命题:如图4-14,设任意三角形$\triangle ABC$,以AB,AC为边任意作两个平行四边形ABB_1A_1,ACC_1A_2.点M是B_1A_1与C_1A_2的交点,连AM,作BB_2平行且等于AM.以BB_2,BC为边作平行四边形BCC_2B_2,则其面积等于平行四边形ABB_1A_1,ACC_1A_2的面积之和.对于任意的三角形、随意的平行四边形都具有勾股定理类似的属性,帕普斯定理的确颇具

魅力.

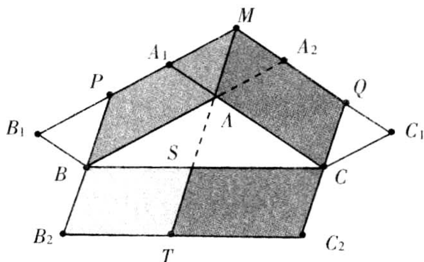


图 4－14

“驴桥”定理:“等腰三角形底角必相等”. 现在教科书上的证法极其简单. 但若只能采用欧几里得《几何原本》卷一前四个定理为依据进行推理,证明的过程十分为难. 还要做辅助线,构造出三角形,几番周折,还得长篇大论. 这样的证明曾把剑桥大学当时的许多学生害苦了. 由此被认为它是“笨蛋的难关”,因而被称为“驴桥”定理.

斯坦纳—雷米欧司定理:两条内角平分线相等的三角形为等腰三角形. 定理叙述非常简单. 这是一道脍炙人口的历史名题. 1840 年,德国数学家雷米欧司给朋友的一封信中提出了这经典定理. 后来,瑞士几何学家斯坦纳给出了最初的一个证明,所以此定理就以斯坦纳—雷米欧司而闻名于世. 斯坦纳—雷米欧司定理从问题提出到两个简洁证法的诞生,竟历时 140 年之久. 十分简洁的命题,却是高难度的证明.

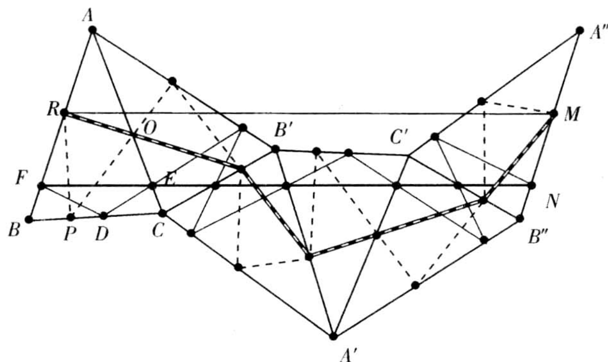


图 4－15

许瓦兹定理:作一个内接于锐角三角形的三角形,使其周长最小. 许瓦兹提出并证明得到,三角形的垂足三角形周长最小. 如图 4－15,$\triangle DEF$ 是锐角$\triangle ABC$ 的垂足三角形,$\triangle PQR$ 是$\triangle ABC$ 的任意内接三角形,通过六

次反射变换，由两点 R,M 间折线长是任意内接 $\triangle PQR$ 的周长的二倍，且大于线段 RM，线段 FN 长为垂足 $\triangle DEF$ 周长的二倍，由反射变换的原理知 $FN=RM$，从而得知任意内接 $\triangle PQR$ 的周长不小于垂足 $\triangle DEF$ 周长.

如图 4－16，还有数学家给出了如下的方法：设锐角 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任一点 D，R、Q 是 AB，AC 上任一点，$CF\perp AB$，$BE\perp AC$，垂足为 F，E. 连 DF，DE，DR，DQ，分别作关于直线 AC，BC 的对称变换，得 $DQ=QN$，$DR=DM$，$DE=EN$，$MF=DF$，且 M，F，E，N 在一直线上，于是，$\triangle DQR$ 的周长不小于 $\triangle DEF$ 的周长，$\triangle DEF$ 的周长为 $MN=DF+EF+DE$.

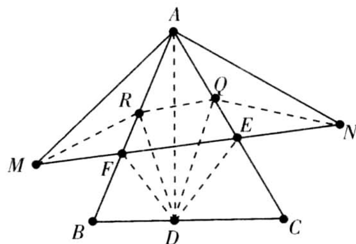


图 4－16

如图 4－17，连 AD，作 D 分别关于 AB，AC 的对称点 M，N，所以 $AM=AD=AN$，$\angle MAB=\angle BAD$，$\angle DAC=\angle CAN$，从而，$\angle MAN=2\angle BAC$（定值），由余弦定理，有 $MN=2AD(1-\cos2\angle BAC)$，所以当 AD 最小时，即 $AD\perp BC$ 时，MN 最小，即 $\triangle DEF$ 周长最小. 这说明，在锐角 $\triangle ABC$ 的所有内接三角形中，垂足 $\triangle DEF$ 的周长最小. 这些奇妙的证法令人拍案叫绝！

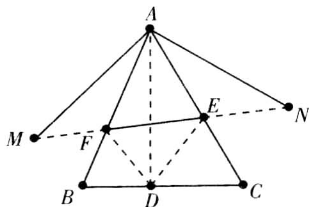


图 4－17

维维安尼定理：等边三角形 ABC 内任一点 P 到三边的距离之和等于定值. 此定理在三角形中是常常见到的几何命题. 定理由伽利略的弟子、意大利物理学家、数学家维维安尼发现的. 定理简单，证明也很简洁，利用三角形 ABC 分割三角形 PAB，PBC，PCA，利用面积公式及等边三角形的特征，立即得证.

不仅研究单个三角形，还研究两个关联的三角形，这种研究更有趣了，但其中隐匿的几何规律更复杂了. 德萨格（1593—1662）把两个三角形放在一块研究共点共线问题，还真有了奇巧的发现，得到有名的德萨格定理：如

果两个三角形的对应顶点的连线相交于一点，则对应边的交点必共线. 如图 4－18，即$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$中对应点连线AA_1，BB_1，CC_1相交于一点O，则BA与B_1A_1，BC与B_1C_1，AC与A_1C_1交点P，Q，R在同一直线上. 共点、共线在同一处出现，千古奇观!

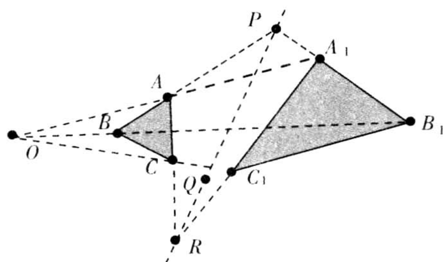


图 4－18

7　三角形的分割，挑战思维的游戏

一分为二、一分为三、一分为四、一分为九等都是三角形研究中极其有趣的问题，同时也是富有挑战性的课题. 研究三角形的分块，讨论其中蕴含的几何性质，也是三角形中常见的数学问题. 如何把一块其中一个角是 30°由直角三角形分成大小和形状都相同的三块，这就是一分为三的问题. 只要过斜边的中点E作AB的垂线，交AC于点D，连BD，DE，即把三角形分成三块，其大小或形状都相同的，如图 4－19.

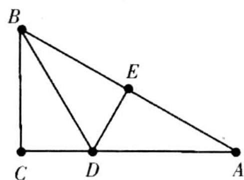


图 4－19

三角形的分割也是几何中热点问题，且富有挑战性. 波兰科学院院士施泰因豪斯在《数学万花镜》中提出，如果$\triangle ABC$三边上的D、E、F都是三等分点，如图 4－20，那么连AD、BE、CF，三线段分三角形成七块，而中间那个$\triangle PQR$的面

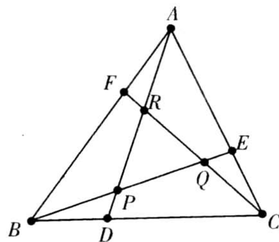


图 4－20

积是$\triangle ABC$的$\frac{1}{7}$.

尽管三角形图形简单，但蕴含的内涵十分丰富，经典的三角形、历史悠久的名题、富饶的人文精神、数学家满腔的热情、执著的追求，无不打下人类活动的烙迹.《三角形趣谈》的作者由衷地赞叹，由三条线段首尾相结所构成的最简单、最基本的图形，一眼就能"看透"，竟然会有这么多奥妙！①难怪德国数学家克雷尔在出版的《三角形性质》中发出了惊叹：像三角形这么简单的图形也有如此无穷无尽的数学内涵！尤其是三角形的文化内涵！英国著名的谜语权威杜登尼，曾把一等边三角形分割成四块，然后再拼成正方形.如图 4－21.

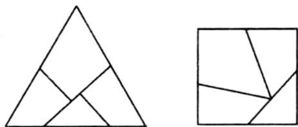


图 4－21

第二节　经典多边形：沉淀的文化

> 在形状、大小、位置等千变万化的无限多的凸多边形中固定不变的规律，因我自己被深深打动了，所以我要以激动的心情，极力宣扬这种在千差万别中存在着万世不变的法则的事实……②
>
> ——米山国藏

三角形为多边形奠定了基础.三角形拼图可以得到更多、更复杂的多边形.多边形是三角形发展的必然结果，也是生活中必会遇到的几何图形.从古至今，不知道有多少数学家关注多边形，也不知多少数学家为了多边

① 杨世明.三角形趣谈[M].上海：上海教育出版社，1989：1-11.

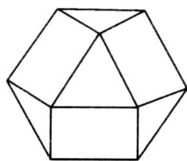
② 郭思乐.数学素质教育论[M].广州：广东教育出版社，1990：35.

形而废寝忘食.笛卡尔为了矩形曾进行细致的研究工作,曾研究正方形、矩形、正多边形等面积的最值问题.还有丢勒、费希纳的黄金矩形、安蒂丰、达·芬奇沉醉于化圆为方,阿基米德沉迷于几何图形却被杀死."没有一个罗马人死于对几何图形的沉思中"(怀特海),但阿基米德却被后人记住,而衷斯奇勒斯被遗忘.中国唐代七巧板、郎家庄出土的水晶珠、无理数矩形、毕达哥拉斯与正多边形覆盖、勾股定理与弦图、完全平方公式的矩形表示、伽菲尔德对勾股定理的证明、多边形的剖分、完美矩形、托勒密定理、完全四边形的牛顿线、四边形的欧拉定理、梯形的斯坦纳定理等,无不显示出多边形迷人的风采、历史的震撼、思维的惊艳以及文化底蕴的丰厚.多边形不应只是正方形、矩形、平行四边形、菱形等几何图形,它包括以图形符号为载体、成千上万年时间沉淀的数学文化,以及人类数学活动的痕迹,体现人类精彩的数学思维以及人类古今东西数学文化交流,以及饱含数学家对多边形执著的热情,这一切的一切构成数学文化中的多边形.回首多边形的历史文化,无人不激动、欣喜,无人不深深地体验到深厚的文化底蕴.

1 文物中的多边形,展示其悠久的历史

在历史长河中,人类早就有了多边形这些美妙的图形.多边形历史的、文化的、艺术的内涵是极其丰富的.中国古代,就有了正方形、正多边形的图形概括,并强调多边形的作用,如"圆出于方","不以规矩,不成方圆".这显示,方、圆在人类生活中、在几何中的重要地位.

在河南安阳的殷墟文物上刻有五边形、六边形、九边形的装饰图案,宝鸡出土的文物上有正方形、矩形等几何图形.如图 4-22、图 4-23,半坡出土的陶器中有四边形图案.1971 年在山东淄博郎家庄出土的约公元前 500—公元前 400 的水晶珠[①],由 6 个全等的正方形和 8 个全等的三角形构成,具有很高的工艺水平和几何

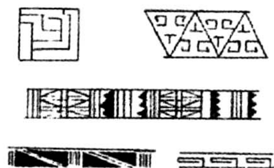


半正多面体水晶珠

图 4-22

① 李迪.中国数学通史(上古到五代卷)[M].南京:江苏教育出版社,1997:72.

水平，说明人类对多边形已经有了深刻的认识. 还有许多出土漆器中画有正方形、平行四边形、菱形、长方形等图案. 这表明，人类已经有了正方形，矩形、菱形、平行四边形等知识. 事实上，春秋战国时期的许多史料说明，当时已经提出并解决了求长方形、梯形等图形的面积.



郎家庄出土漆器的几何图案

图 4-23

2　古希腊与多边形，图形的抽象

公元前 6 世纪，毕达哥拉斯学派利用几何图形来表示整数的一些特征. 他们根据垒成的小石子形状把数分为正三角形数、正方形数、正五边形等. 后来，慢慢地抽象概括图形的特征，用象形的图形符号表示各种几何图形，如公元 500 年海伦首先用符号“□”表示正方形，后来帕普斯和厄里岗也先后使用过“□”表示正方形，厄里岗最早使用符号▱表示平行四边形，同时使用符号▭表示矩形. 这些符号直观地表示了几何图形，简单形象. 多边形符号形成的历史暗示我们多边形的历史极其悠久，内涵也极为丰富.

毕达哥拉斯掌握了正多边形的性质，他们发现，能覆盖平面整个区域的图形只有三种：等边三角形、正方形、正六边形，而且这些正多边形个数之比为 6∶4∶3，而它们的边数之比为 3∶4∶6. 有人说，上帝把最好的和最完美的智慧和数学思维给予人类，同时也把一部分给某些无理智的动物，使它们有维持生命的本领. 蜜蜂凭着本领的智慧，选择了正六边形作为蜂房的形状. ①人类能清醒地认识到，可用等边三角形、或正方形、或正六边形铺满平面，如图 4-24.

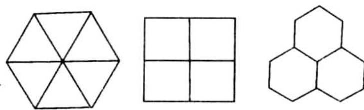


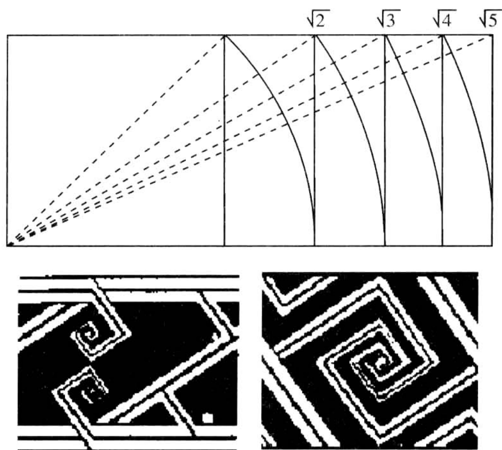
图 4-24

① 欧几里得. 几何原本[M]. 燕晓东，译. 南京：江苏人民出版社，2011：185，445.

许多几何图形是人类特有的属性.欧几里得全集中有一幅关于“人的踪迹”的版画，因船舶失事漂泊到一孤岛上，希腊哲学家亚里士提卜发现了画在沙滩上的正方形、三角形等几何图形，意识到发现了人的踪迹，看到希望.古希腊人对几何非常偏爱，对菱形、平行四边形等图形情有独钟，常用来称赞那些美丽的事物，并把食品和用具做成各式各样的几何图形.①

3 矩形与黄金矩形，展现图形的优美

矩形也是重要的多边形，人类生活中许多地方都使用矩形表达思想，制作图案.如现代各种数量统计，往往使用矩形来表示密度分布频率，城镇人口密度分布、成绩分布等.有数学家制作无理数矩形，也称为动态矩形，如图 4－25，利用动态矩形还可制作服饰图案，精致有序.



由动态矩形做成的图案

图 4－25

黄金分割比是古希腊人的审美发现，最美黄金比.1525 年，德国著名画家、雕刻家、数学家丢勒(1471—1528)利用黄金分割法则，制定矩形的黄金

① 克莱茵.西方文化下的数学[M].张祖贵，译.上海：复旦大学出版社，2007：37.

比例意义，并认为在所有矩形中，短边与长边之比为 0.618 的矩形最为美观，最美的是黄金矩形. 更有意思的是，19 世纪中叶，德国心理学家费希纳，专门为矩形举办一次展览，展出由他精心制作的一批矩形. 要求参观者投票，选出自己认为最美的矩形. 结果有 4 种矩形被选为最美矩形. 如表4－1，有趣的是这 4 种矩形的长与宽的比值都接近 0.618，人们把这种长与宽的比值近似于 0.618 的矩形称为“黄金矩形”.

表 4－1　最美矩形

矩形	宽与长的比
1	21∶34=0.618
2	13∶21=0.619
3	8∶13=0.615
4	5∶8=0.625

还有数学家把黄金矩形截取一正方形后，剩下的又是黄金矩形，接着，又将剩下的黄金矩形又截出一个正方形，并在各正方形内作四分之一圆，如此下去，如图 4－26，就形成一个漂亮的对数螺线，圆润饱满，如鹦鹉螺线般，真是美不胜收. 数学史上还有数学家专业研究矩形剖分问题，如将一矩形划分为若干正方形，若一矩形能剖分为 m 个正方形，则称此矩形为 m 阶完美矩形. 如 9 阶完美矩形、10 阶完美矩形，如图 4－27. 这样的完美矩形确定存在不多. 完美矩形如完美数一般，凤毛麟角，但美轮美奂.

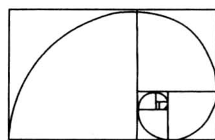


图 4－26

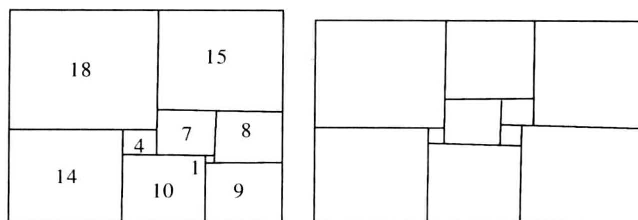


图 4－27

4　多边形的无字证明，体现人类的睿智

人类早期的证明往往是无字证明，许多证明通过多边形来完成. 历史上，通过大大小小的正方形等图形去完成勾股定理的无字证明. 中国最早记载勾股定理证明的是 3 世纪数学家赵爽. 他在注释《周髀算经》中有“弦图”，如图 4－28，下面写道“勾股各自乘，并之为弦实，开方除之，即弦.”由 4 个全等的直角三角形和一个正方形组成，通过拼图立即证明了定理.

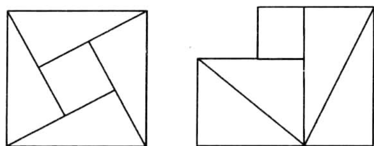
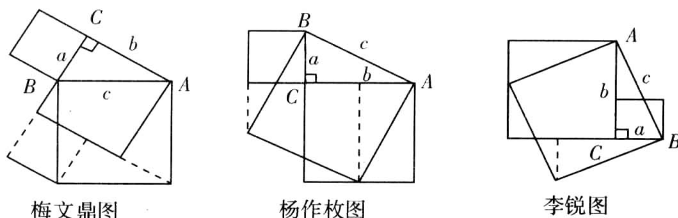


图 4－28

12 世纪，婆什迦罗曾对正方形的分割，重新拼图去解释勾股定理. 他的证明方式恰巧与魏国时期赵爽《周髀算经》注所作的图形一模一样. 对于定理证明，婆什迦罗仅写下一句：“看呀！” 无需多言. 这是勾股定理最简洁的证明，也是历史上最简洁的数学证明. 数学史上如梅文鼎、杨作枚、李锐、安清窍、何梦瑶如等众多数学家通过正方形的分割，如图 4－29，再拼出正方形去完成勾股定理的证明. ①他们作出的图形各异，拼个图，做个游戏，勾股定理就能无字证明，一目了然！



梅文鼎图　　杨作枚图　　李锐图

图 4－29

① 黄家礼. 几何明珠[M]. 北京科学普及出版社，1997：4.

欧几里得所给的对于毕达哥拉斯定理的证明繁冗,不易记忆.一个优美得多的证明归功于印度数学家阿耶波多(公元466).①如图4-30,两个小正方形的边长分别是a,b,而大正方形的边长c恰好是以a,b为直角边的直角三角形斜边,两个小正方形拼上图形1,2,3,4后得到边长为$a+b$的正方形,而以c为边的正方形,再拼上图形1,2,3,4后也正好得到边长为$a+b$的正方形.于是,两小正方形面积的和等于大正方形面积,即证明了勾股定理.

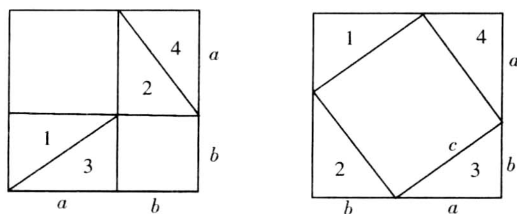


图4-30

佩里伽尔把边长分别是a,b的两个正方形放在一块,然后分割为三块1,2,3,如图4-31,其中$BH\perp BE$,且$BH=BE$,把这三块再拼成一边长为c的大正方形$BECH$.即证明了直角三角形中两直角边上的正方形面积的和等于斜边上正方形面积,即证明了勾股定理.

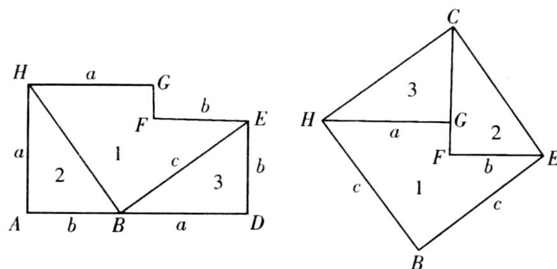


图4-31

历史上,还有一件特别有意思的事.就是1876年,美国当时的总统伽

① [英]鲍尔,等.数学游戏与欣赏[M].杨应辰,等,译.上海:上海教育出版社,2001:87-91.

菲尔用两个直角边分别是 a,b 的直角三角形，以及直角边是 c 的等腰直角三角形拼成直角梯形，从而对勾股定理作出精彩的证明，如图 4－32，比较三个直角三角形和所构成的直角梯形，通过计算梯形的面积，以及三个直角三角形面积的和，整理，立即证明了勾股定理.

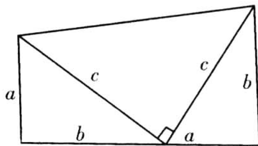


图 4－32

符号化的证明太抽象，许多人不习惯，希望通过直观图形去证明命题. 因为他们相信图形的无字证明，并用之去证实定理的真实性. 对于完全平方公式，法国大思想家卢梭认为：当第一次通过计算发现二项式的平方等于它各项的平方和加上这两项之积的两倍，我根本不相信这一结果，直到我找到了一个能验证结论的几何图形，情况才发生了根本变化. 我最喜欢把代数看作一种纯抽象的量，每当果真扩展应用范围时，又希望看到这种扩展在几何图形上进行，否则什么也不能理解. 一个大正方形的面积等于组成它的两个小正方形的面积与矩形面积二倍的和，如图 4－33 的无字证明，这样的结论必定会使人完全相信. 这种想法也促使了许多数学创意的诞生.

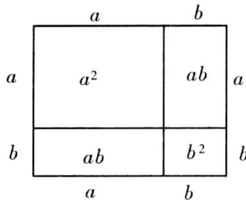


图 4－33

5 分割多边形，历史悠久的游戏

七巧板来自中国的唐朝，欧洲人称七巧板为唐板. 如图 4－34，将正方形剪成七块，两大一中两小的等腰直角三角形，还有正方形、平行四边形各一个. 七巧板传到欧洲以后，就有了消磨时光、挑战智力的趣味游戏. 拿破仑在流放时也曾以拼七巧板来消遣时间.[①]七巧板所拼的图成千上万，造型各异. 但有人证

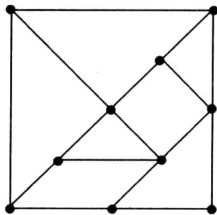


图 4－34

① 李必成. 几何学大厦的基石——帮你学几何[M]. 福州：福建人民出版社，1986：79.

明了，用一副七巧板拼出来的许多图案是多边形，但只能拼出 13 种凸多边形. 现在许多人把七巧板引入课堂，成为学生游戏学习的学具.

世界著名的德国数学家希尔伯特首次证明了"任何一个多边形都能分割成有限块，并能拼成具有相等面积的多边形". 18 世纪末，蒙蒂克拉提出把矩形进行分割，然后再拼成一正方形. 反过来，他又把一正方形进行分割再拼成一个等面积的矩形. ①

波尔约还提出了更一般的问题. 对任意的多边形，通过分割若干部分，再把各部分重新拼图，得到一面积相等的另一多边形. 如平行四边形分割后再拼成一等积的矩形，给出了一些分割、拼图方法：

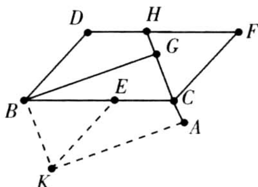


图 4-35

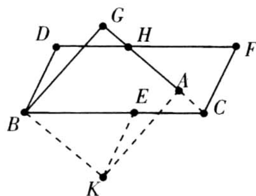


图 4-36

在平行四边形 $BCFD$ 的边 DF 上取合适点 H，过点 B 作直线 BG 垂直 CH 于点 G. 点 G 可能位于平行四边形之内，如图 4-35，也可能位于平行四边形之外，如图 4-36. 在射线 GC 上找一个点 A，使 $GA=HC$，过点 A 作 AK 平行且等于 BG. 连 BK，得矩形 $BGAK$. 过 K 作 KE 平行 BD，易证，平行四边形 $BCFD$ 拼成矩形 $BGAK$.

6　多边形的经典名题，展示几何的精彩

多边形是边数较多也很复杂的几何图形，在数学的历史长河中自然会萌生出有关多边形定理. 沙粒淘尽始得金. 这些命题经过几千年的洗礼，通过数学家们长期的研究、传播，增加了丰富多彩的内涵，成为几何学中一颗

① ［英］鲍尔，等. 数学游戏与欣赏［M］. 杨应辰，等，译. 上海：上海教育出版社，2001：87-91.

颗璀璨的明珠,成为数学史上的经典名题.而这些多边形的经典名题似乎具有无限的魅力,人们尽管感到证明它们十分为难,但总是有着无穷的诱惑.

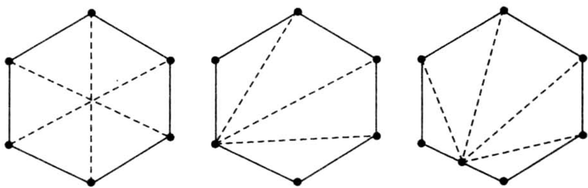


图 4-37

多边形内角和定理:早在古希腊时期,泰勒斯提出的许多几何命题,包括三角形内角和定理,毕达哥拉斯学派把三角形内角和推广到多边形,提出了多边形内角和定理,并被欧几里得录入《几何原本》,给出证明.关于多边形内角和定理的证明方法的探索过程中,人类提出许多巧妙的方法,独特的方式去领略多边形内角和.如在多边形内部任取一点,或在边上任取一点,或在内部任取一点,如图 4-37,再依次连多边形的顶点,得到多个三角形,通过三角形的内角和去证明 n 边形的内角和为$(n-2)\cdot 180°$.

还有更精彩的是,马赫用一根铁丝直观证明了 n 边形内角和为$(n-2)\cdot 180°$.他的证明被誉为无字证明的一则佳话.如图 4-38,n 边形的内角和为$\sum\limits_{i=1}^{n}(180°-\alpha_i)$,根据铁丝的转动,其绕过的角度和为 360°,而这恰好是多边形的外角和,可以得到结论:

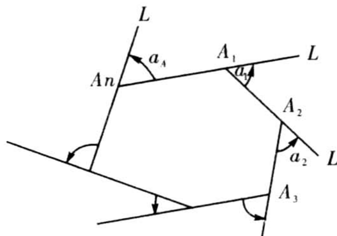


图 4-38

$$n\text{ 边型的内角和} = \sum_{i=1}^{n}(180°-\alpha_i) = (n-2)\times 180°.$$

在欣赏了凸多边形内角和定理之后,日本数学教育家米山国藏感慨万千,“我只是希望能注意到这样一件事,即存在着贯穿于形状、大小、位置等千变万化的无限多的凸多边形中的固定不变的规律,因我自己是被深深打动了,所以我要以激动的心情,极力宣扬这种在千差万别中存在着万世不变的法则的事实,宣扬数学证明了这种存在,证明了这种法则,使大家都承

认它的真确性.”①

四边形与托勒密定理：托勒密是古希腊的著名数学家. 他根据圆内接四边形的特点，发现四边间的数量关系，提出托勒密定理：圆内接四边形两对边的乘积和等于对角线的乘积. 此定理对三角的产生与发展起到了奠基石的作用. 如图 4－39，后人去掉定理中“圆内接”的限制，定理得到推广，即广义的托勒密定理：凸四边形两对边的乘积和不小于对角线的乘积.

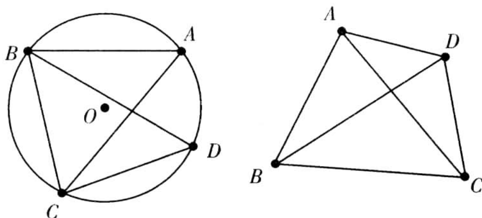


图 4－39

婆罗摩笈定理：如图 4－40，内接于圆的四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 垂直相交于 K，过点 K 的直线与边 AD，BC 分别相交于点 H，M.

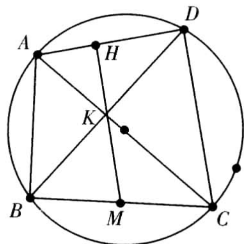


图 4－40

(1) 若 KH 垂直 AD，那么 $CM=MB$；

(2) 若 $CM=MB$，那么 KH 垂直 AD.

完美四边形的牛顿线：完美四边形是指两两相交，且没有三线共点的 4 条线段及它们的 6 个交点所构成的图形，即凸四边形 $ACBD$ 两组对边 DB 与 AC，DA 与 BC 互相延长，交于点 F，E. 如图 4－41. 完美四边形具有许多优美的特征. 1685 年，牛顿发现了完美四边形的优美性质：完美四边形的三条对角线的中点共线，即 BC，AB，EF 的中点共线. 到了 1810 年，高斯重新发现并独自证明了这一定理. 为了纪念牛

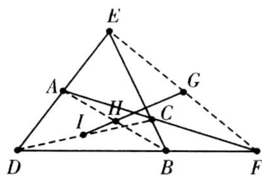


图 4－41

① 郭思乐. 数学素质教育论[M]. 广州：广东教育出版社，1990：35.

顿，后人把过完美四边形三条对角线的中点的直线称为牛顿线. ①

四边形的欧拉定理：欧拉在四边形研究有也有不少成就. 以欧拉名字命名的定理有许多，在多边形中也有不少. 如四边形的欧拉定理：对于任意四边形的四边平方和等于对角的平方和再加上两对角线中点连线的平方的四倍. 如图 4－42.

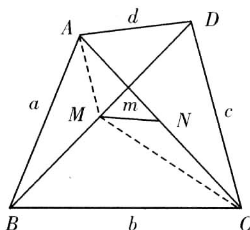


图 4－42

当对角线相互平分时，四边形的欧拉定理有了推论：若四边形的对角相互平分，$MN=0$，则四边形的四边平方和等于对角的平方和. ②

多边形的复杂性是随其边数的增加而增加的（波利亚）. 欧拉对凸 n 边形分割也有研究. 1751 年欧拉向哥德巴赫提出：凸 n 边形，由其对角线割成三角形组，求这些三角形共有个数. 此问题最终由欧拉自己解决，如图 4－43，做凸 n 边形的对角线所能割得的三角形的个数公式是：

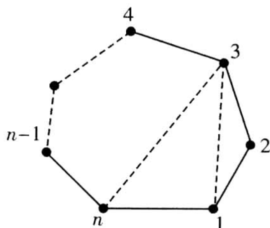


图 4－43

$$E_n=\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot \cdots \cdot (4n-10)}{(n-1)!}.$$

欧拉自己说，“推导公式，我用了十分艰苦的劳动”. ③

梯形的斯坦纳定理：斯坦纳，著名的几何学家，他提出、证明过许多经典的定理. 梯形的斯坦纳定理就是其中之一：梯形的两对角线的交点 P 与

① 单墫. 数学名题词典[M]. 南京：江苏教育出版社，2002：373-374.

② ［英］鲍尔，等. 数学游戏与欣赏[M]. 杨应辰，等，译. 上海：上海教育出版社，2001：87-91.

③ 王长烈，朱煜民. 世界数学名题趣题选[M]. 长沙：湖南教育出版社，1998：186.

两腰延长线的交点 G 的连线必平分梯形的上、下底. 即 M,N 为底 AD,BC 的中点. 如图 4 - 44. 这是我们常见的几何定理,原来是由斯坦纳发现、提出来的.

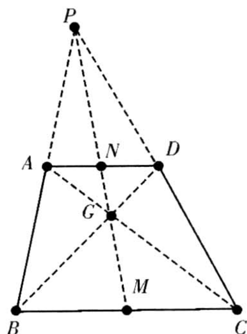


图 4 - 44

六边形与帕斯卡定理:帕斯卡定理是几何中非常有名的定理. 帕斯卡(1623—1662),法国的物理学家、数学家、文学家. 他是一位天才,18 岁时发明并制造了历史上第一台计算机. 25 岁左右,发现了物理学中关于液压传递的帕斯卡原理. 他为概率论发展作出了奠基性工作. 他还是法国杰出的文学家,他的《思想录》与《致外省人的信》是法国文学的宝藏. 可惜,从 31 岁起,他投身于神学,沉湎于宗教狂热. 自古英雄出少年. 让后人惊讶的是,帕斯卡 16 岁发现了关于六边形的帕斯卡定理:如果一个六边形内接于一条二次曲线(椭圆、双曲线、抛物线),那么它的三对对边的交点在同一条直线上. 这一定理称为帕斯卡定理. ①帕斯卡定理的重要特例:"圆内接六边形三对边的交点共线". 如图 4 - 45,六边形 $ABCDEF$ 中,直线 AB 与 ED,BC 与 FE,CD 与 AF 分别相交于点 M,N,P,则点 M,N,P 共线.

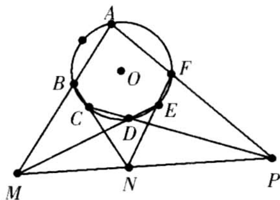


图 4 - 45

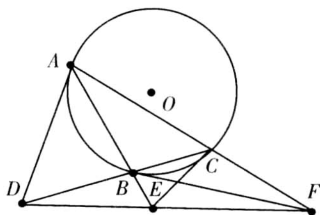


图 4 - 46

帕斯卡定理的特例:圆内接三角形,每一顶点处的切线与对边的交点,这三点共线,如图 4 - 46. 20 世纪,曾有人以为发现了前人未曾发现的定理. 其实,这三点共线定理是帕斯卡定理的一个特例.

---

① 单墫. 数学名题词典[M]. 南京:江苏教育出版社, 2002:373-374.

7 多边形的尺规作图,挑战人类思维

多边形的尺规作图是几何发展历史上一个经久不衰的课题.从安蒂丰化圆为方开始,到阿基米德、刘徽、祖冲之、高斯等,几千年过去了,人们还在讨论着多边形作图问题和古希腊的化圆为方问题.

(1)化圆为方

化圆为方是几何中尺规作图的经典问题,是数学中的热点话题之一.化圆为方也与多边形有关,它也是几大作图难题之一."安蒂丰在研究化圆为方的问题时想起用边数不断增加的内接多边形来接近圆面积"①,与刘徽、祖冲之的作法相差无几.安蒂丰考虑利用内接正多边形去逼近圆,而后再化圆为方,但无果而终.艺术大师达·芬奇(1452—1519)非常的关注.他曾给出化圆为方的妙解:取一圆柱,其底面圆与已知圆全等,高是底面圆半径的一半,让圆柱滚动一周得到矩形,其面积恰好等于已知圆面积;矩形化为等积的正方形容易解决.20世纪许多数学爱好者还在痴迷着化圆为方,实现了化圆为方的尺规作图.摩根也在玩化圆为方,他认为,把圆变为方也比骗过数学家容易.

(2)正多边形的尺规作图

中国古代数学家刘徽、祖冲之都是利用圆内接正多边形去逼近圆的面积,从而求得圆周率的近似值.刘徽在《九章算术》注中提出"割圆术"算法,用圆的内接多边形去逼近圆,从而达到计算圆的周长、面积和圆周率的目的.他指出,"割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆合体而无所失矣."他从正边形开始,然后将边数逐次加倍,直至正3072边形的面积.由此算出$\pi\approx3.1416$.祖冲之(429—500)继承刘徽割圆术的思想,经过修改算法、反复演算,最后求出π的值介于3.1415926与3.1415927之间.

古往今来,正多边形的尺规作图一直受到大家的关注.哪些正多边形可以用尺规作出?古希腊数学家深入研究,已经能作的正多边形有:

---

① 李心灿.微积分的创立者及其先驱[M].北京:高等教育出版社,2002:5-11.

(1)作正 2^n 多边形. 对古希腊人来说，二等分任意角是雕虫小技；

(2)作正 $3 \cdot 2^n$ 边形，因为古希腊数学家可作出正三角形；

(3)作正 $5 \cdot 2^n$ 边形，因为希腊人会作正五边形、五角形星、黄金三角形，$n=1,2,3,\cdots$.

除此之外，希腊人还会作正十五边形. 由上，只要研究 n 是奇数时的正 n 多边形作图就可以了. 古希腊大科学家阿基米德(公元前 287—公元前 212)发现，要解决尺规作正七边形必须求解三次方程，它的一个根不能用平方根式表示，即不可能用尺规求作正七边形.

正十七边形的尺规作图是欧几里得以来悬而未决的问题，被称作是古希腊几何作图的四大难题之一，一直没有获得解决. 希腊人保持了对正三、五、十五边形的约两千年尺规作图记录，最终被高斯打破. [①]1796 年，19 岁的德国学生高斯(1777—1855)用自己超人的智慧解决了正十七边形的尺规作图. 这一激动人心的轰动事件促使高斯将数学作为终身事业. 对于正多边形哪些是尺规可完成的？高斯经进一步探究，较好解决了尺规可作正多边形的问题[②]. 能尺规作图的正多边形，其边数与费尔马数有关.

化圆为方、正多边形的作图硕果累累. 又有人提出正方形内切圆方面的悖论：设正方形内切圆直径为 1，如图 4－47，正方形与圆间作矩形无限地接近圆，则接近圆的折线的长为 4，并且它的极限是圆的周长. 于是 $\pi=4$，真是悖论!! 于是，又引起了我们深深的思索.

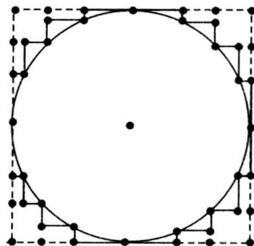


图 4－47

① 张顺燕. 数学的美与理[M]. 北京：北京大学出版社，2004：108.

② 河北教育学院编写组. 数学史小词典[M]. 石家庄：河北教育出版社，1989：214-215.

第三节　圆形的历史:丰厚的文化[①]

圆的概念可以用数学方式描述,可以用物理方式展现,也可以用技术方式应用.圆最初是一个完美的抽象概念,人类利用这个概念改善了自己的生活.[②]

生活中无处不有圆,无时不见圆.我们对圆太熟悉.用圆、玩圆,我国如"没有规矩,不成方圆","人有悲欢离合,月有阴晴圆缺"等好多成语中都有一字"圆".民间活动或其他大型活动也有用圆表示特征的习俗.如圆圆的五环,孕育奥运精神,牵动全球,连通世界.国际上有圆桌会议,与会者围圆桌而坐,共同协商,平等交流.哥伦布绕地球一圈,发现地球是圆的.圆是最基本的图形,也是最简单的曲线.我们知道,小学讲圆的周长、面积、对称性.中学也讲圆,主要讲圆的几何性质,圆的方程,圆与直线、圆与圆的位置关系等.可是在中小学数学教材中,我们几乎没看到人类有关圆的活动,察觉不到人在圆中的痕迹.而事实上,自古至今,人类对圆给予了充分的关注,早已研究发现太阳、地球是圆的,留下了求地球半径、周长、圆周率、面积经典问题,也流传着化圆为方、欧拉圆、拿破仑四等分圆等许多历史名题,这一些都深深地打上人类活动的烙印,体现了人类对圆的执著、对圆的热情,反映着人类对圆的欣赏,平面中最美的图形是圆,立体图形中最美的是球.我们会发现,在人类的研究过程中,圆成为数学模型,去刻画、描述天体物体的运动规律,其中也给予我们许多经典的历史名题,展示了人类在圆的研究过程中巧妙的思维方式和思维方法,重温这些圆的历史名题,既能学习前人绝妙的思维,又能继承人类的探索精神,既让我们惊叹人类对圆的执著热爱,又能给我们提供对圆美的欣赏,让我们滋润于数学文化丰

---

① 此节发表于《数学教学研究》2010年第8期,有删减.

② [美]泽布罗夫斯基.圆的历史[M].李大强,译.北京:北京理工大学出版社,2005:封底.

富的营养之中.

1　生活中的圆

圆是公平,圆是和谐,圆是平衡,圆是对称,圆,妙不可言;圆,包罗万象;圆,成了人生中最美最神奇的形状,成了人类精神部落里永远的图腾.圆圆的五环,孕育奥运精神,牵动全球,连通世界.点燃激情,点燃光明,点燃友谊,点燃和平.哥伦布绕地球一圈,发现地球是圆的.割圆术,开立圆术,割圆曲线.

我们对圆很熟悉.无处不见圆,无时不有圆.生活中不能缺少圆,太阳是圆的,月亮也是圆的;车轮是圆的,钟表是圆的,硬币是圆的;锅、碗、缸是圆的;电风扇、排气管是圆的,下水道盖子是圆的.奥运五环旗由五个相交的圆组成.五环是世界体育的语言符号,是五大洲各族人民团结的象征.国际上有圆桌会议,与会者围圆桌而坐,地位对等,共同协商,平等交流.传说公元5世纪,英国亚瑟王在与他的骑士们共商国事,围圆桌而坐,不排位次,众人平等.圆桌会议由此得名.

我国有关圆的词组很多.送给台湾的两只熊猫是团团、圆圆,节日有中秋团圆、过年团圆,用具有圆规、圆盘、圆筒、圆珠笔,圆有圆周、圆心、圆圈、圆弧、圆周率等,标点符号中有圆括号.表示人的特征有圆滑、圆润、圆熟、圆脸,高兴时听听圆舞曲,实现理想时用圆梦,任务完成时用圆满,人生终结时用圆寂.成语中有"没有规矩,不成方圆","人有悲欢离合,月有阴晴圆缺".圆是西藏宗教的象征,是西藏民族与神交流的方式,与天地对话的途径.

2　圆的经典名题

古时候,很多人猜测地球是圆的.泰勒斯认为,地球乃是浮在水面上的一块圆盘.亚里士多德(公元前384—公元前322)从月蚀推测地球是圆的.他在《论天》中明确写道:在月蚀时,它的外线总是弯曲的;既然月蚀是由于

地球插入(太阳与月亮)其间，那么，它外线的那种形状就应是地球的表面所造成的，所以，地球必定是圆球形.[①]公元前320年，欧几里得的《几何原本》里用圆去描述球，半圆绕着直径旋转一周而回到初始位置时，这样描绘的形状就是球.古希腊学者埃拉托色尼认为，太阳离地球很远，太阳光应平行地照在地球上，而地球上有的地方有影子，有的地方没有影子，这就说明地球是圆的.那么地球的周长、半径是多少.这是早期数学家努力去解决的问题.

(1) 埃拉托色尼是第一个验证地球是圆的，并准确计算地球周长.[②]如图4-48，希伦(S)在亚里山大(A)的正南方，点O是地球的球心.仲夏的某天，太阳在希伦S的正天顶上，太阳能映在水井里；同一时刻，在亚里山大城A测得的太阳光对铅垂线ON的角，即$\angle PAN$是$7.5°$，一般认为太阳光线AP、SQ是平行的.因此，$\angle QON=\angle PAN=7.5°$，$7.5°$是$360°$的$\frac{1}{48}$，地球周长是弧$AS$长的48倍.他们测得了$A$、$S$两地的距离，于是地球周长大约是3.9万公里.这与现代较准确的结果4万公里相差无几.

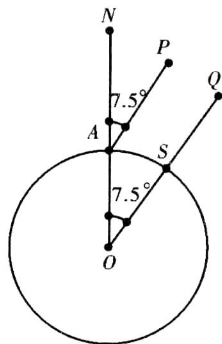


图4-48

(2) 10世纪，中亚细亚阿尔·婆罗尼曾创造一个简洁而非常有新意的方法，去测量地球半径.如图4-49.用现代的记号表示是：

$R=(R+h)\cos\alpha$,

即有 $R=\dfrac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$.

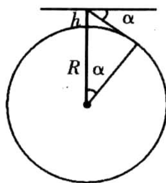


图4-49

其中h是测量出人所在位置的高度，R是地球的半径.

(3) 10世纪，阿拉伯的比鲁尼三角学方面造诣很深，也曾创造性地给

① 史宁中.数学思想概论[M].长春：东北师范大学出版社，2009：29－32.

② 鲁品越.西方科学历程及其理论透视[M].北京：中国人民大学出版社，1992：69.

出了测量地球半径的方法. 首先用带有刻度的正方形 $ABCD$ 测出山高，

$$GT=\frac{CT\cdot CE}{CD}，其中\ CT=\frac{AD\cdot CD}{FA}.$$

再在山顶 T 处悬挂一直径为 SP 可以转动的圆环 $MPNS$，如图 4-50. 从山顶 T 观测地平线上一点 I，测得俯角 $\angle OTI=\alpha$.

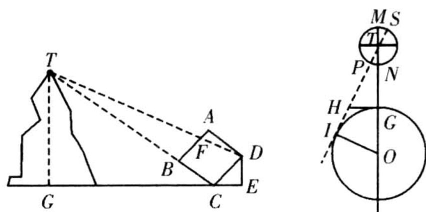


图 4-50

由于 $HT=\frac{GT}{\sin(90^\circ-\alpha)}$，

$HG=\frac{GT}{\tan(90^\circ-\alpha)}$，

$HG=HI$.

得到 $IT=HT+HG$，从而算出地球半径 $IQ=\frac{IT}{\tan(90^\circ-\alpha)}$.

3　数学家化圆为方

化圆为方是历史上在近两千年内尺规作图的三大重要问题之一. 曾有研究指出，化圆为方的问题，可以通过转化为正多边形而获得解决. 如果把圆能化为正多边形，而正多边形容易化为正方形了. 这似乎为尺规作图中化圆为方问题提供解决思路. 化圆为方的另一思路是，把半月形或皮刀匠形能化归为直线形，问题也能获得解决. 在这样的研究思路中，出现了希波克拉底的半月形和阿基米德皮刀匠形这两个最有名的问题.

（1）希波克拉底与半月形

用圆规、直尺化圆为方即作一正方形，使其面积等于给定圆形的面积. 三等分角即三等分弧. 公元前 430 年，享有盛名的希波克拉底，利用圆的特

征把曲线面积化为直线形面积的方法，把两个半月形的面积化为三角形的面积. 如图 4－51，等腰直角三角形 ABC，以 AB，BC，AC 为直径分别作三个半圆，整个图形除去以 AB 为直径的半圆，得到两个半月形. 利用毕达哥拉斯定理得到，AB 为直径的半圆的面积等于 BC 为直径的半圆面积与 AC 为直径的半圆的面积之和，各自除去 AB 为直径的半圆上弦 BC、AC 所对的弓形面积，则直角三角形 ABC 的面积等于两个半月形的面积.

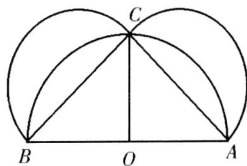


图 4－51

(2)阿基米德与皮匠刀形

皮匠刀形即三个半圆间的曲线图形. 如图 4－52，阿基米德首先研究并提出命题：大半径圆内含两个相切的小半圆. 三个半圆间的曲线图形，即皮匠刀形的面积等于两个小半圆公切线长为直径的圆的面积. 因为

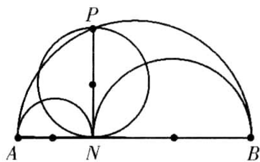


图 4－52

$$AB^2=AN^2+BN^2+2ANBN=AN^2+BN^2+2PN^2.$$

所以 $AB^2-AN^2-BN^2=2PN^2$.

再由圆与圆的面积比等于其半径平方之比易得证命题成立.

(3)阿基米德等与圆的正多边形

最伟大的数学家之一阿基米德，对圆的研究给予了极大的关注，阿基米德是用圆内接正 n 方形和圆的外切正 n 边形来估算的. 如图 4－53. 其《圆的度量》中研究认为，圆的面积等于一直角三角形的面积，此直角三角形的两条直角边分别等于圆的半径和圆周；圆的面积与其直径上的正方形面积之比，近似地等于 11∶14. 圆周比直径的 3 倍大，所大部分小于直径的 $\frac{1}{7}$，大于直径的 $\frac{10}{71}$.

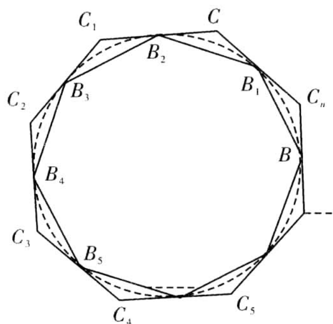


图 4－53

除此以外，我国古代数学家祖冲之也是利用圆的正多边形去估算圆周率的，并给出了精确度非常高的圆周率的近似值. 圆的正多边形的尺规作图也是最有诱惑力的问题之一，正多边形尺规作图与费尔马数还有紧密关系. 大高斯也研究正十七边形的尺规作图问题并成功获得解决.

4　开普勒巧妙求圆的面积

圆的面积历来是人类非常关心的问题，人们一直在寻求求圆面积的方法. 开普勒对圆进行了深入的研究. 开普勒把半径为 r 的圆分割为无数个相同的微小扇形，每个微小的扇形近似看作小等腰三角形，无数个小等腰三角形的底边 Δx_i 构成圆周. 如图 4 - 54，于是，圆的面积就是

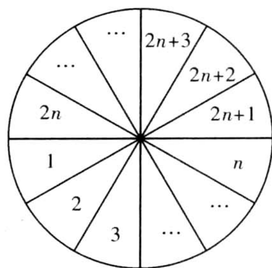


图 4 - 54

$$S = \sum S_{\Delta_i} = \frac{1}{2}\sum \Delta x_i r = \frac{1}{2}r\sum \Delta x_i = \frac{1}{2}r \cdot 2\pi r = \pi r^2.$$

也有记载认为，开普勒采用了一种有趣的方法：将圆等分为 $2n$ 个小扇形，然后把 $2n$ 个小扇形剪开放在一起，拼成如图 4 - 55 所示的近似平行四边形，平行四边形的高近似等于圆的半径 r，平行四边形的底约等于半圆的弧长 πr，于是圆的面积等于近似平行四边形的面积 πr^2，从而解决了圆的面积问题. 通过对圆的分割、拼凑求其面积，我们可以发现人类是如何猜测圆的面积.

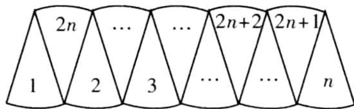


图 4 - 55

5　拿破仑四等分圆

尺规作图深受数学家及广大数学爱好者的喜欢. 更为甚者，有人对作图工具提出更加严格的限制，竟然提出单尺、单规进行几何作图. 其中，军

事、政治才能都显赫于世的法国皇帝、统帅拿破仑，对单规作图十分感兴趣，利用单规对圆四等分. 传说他竟然在马背上颠簸出用单规四等分圆的妙法. 具体作法：

令⊙O的半径为R. 如图 4 - 56.

(1) 在⊙O上任取一点A，以R为半径，自点A起，顺次截取三段相等的弧AB、BC、CD.

(2) 分别以A、D为圆心，以AC为半径作弧，两弧交于点E.

(3) 以A为圆心，OE为半径作弧交⊙O于G、H两点，则A、G、D、H四点即为⊙O的四等分点.

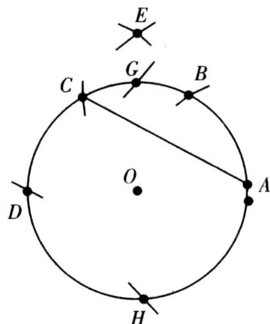


图 4 - 56

证明如下：

连AC、DC和AE、OE易见AD是⊙O的直径，且$\angle DAC=30^\circ$.

在 Rt$\triangle ACD$中，可知$AC=\sqrt{3}R$，则$AE=AC=\sqrt{3}R$.

在 Rt$\triangle AOE$中，算出$OE=\sqrt{3R^2-R^2}=\sqrt{2}R$.

而$AG=AH=OE=\sqrt{2}R$.

所以A、G、D、H为⊙O的四等分点.

6 数学家的共点圆

从古到今，五点圆、九点圆等共点圆问题一直受到大家的关注，经久不衰，由此而引出了欧拉圆、泰勒圆、Miquel 圆、费尔巴哈圆、或庞斯莱圆等，还提出了泰勒斯定理、五圆定理、Miquel 定理. 当然，最有名的还是数九点圆，它是一个著名的几何学问题.

(1)欧拉圆

欧拉圆又叫做九点圆、费尔巴哈圆，或庞斯莱圆，如图 4 - 57，拖动三角形ABC任一顶点，三边的中点，三高的垂足、顶点与垂心连线的中点总是九点在同一个圆上. 1882 年，K. W. 费尔巴哈证明了三角形的九点圆与其

内切圆及旁切圆之间存在充满魅力的关系,证明了三角形的九点圆同时切于三角形的内切圆和它的三个旁切圆.①

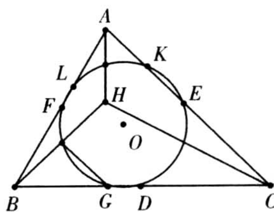


图 4-57

(2)Miquel 圆

在任意五角星 $ABCDE$ 中,如图 4-58,$\triangle AJF$,$\triangle BGF$,$\triangle CGH$,$\triangle DHI$,$\triangle EIJ$ 的外接圆依次相交于点 N、M、O、L、K. 那么,点 N、M、O、L、K 五点共圆. 即五圆定理,此圆称为 Miquel 圆.

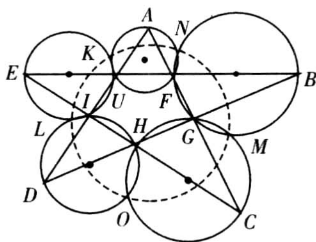


图 4-58

有很多人对它感兴趣,如张景中教授在《计算机怎样解几何题》给出了证法,江泽民先生等为对五点共圆进行证明,还特意向张景中院士请教. 在出席澳门回归一周年庆典时,江先生给了澳门中学生这道五点共圆题. 这又引起包括中学生在内的很多人的兴趣. 对五个点共圆的证明,著名数学家丘成桐说,他也要想半小时才行. 毕竟是历史名题,曾有很多人关注过,自然在一些书中,如单墫的《数学名题词典》中就能找到五点共圆的证明.

(3)数学家 Louis Brand 与八点圆

1944 年,数学家 Louis Brand 提出了八点圆. 在四边形 $ABCD$ 中,$AC \perp BD$,E、F、G、H 分别为 AB、BC、CD、DA 的中点,由 E、F、G、H 对边作垂线,垂足分别是 K、L、M、N,于是 E、F、G、H、K、L、M、N 八点共圆. 如图4-59.

---

① 单墫. 数学名题词典[M]. 南京:江苏教育出版社,2002:428-445.

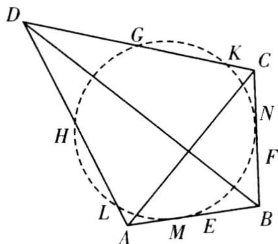


图 4-59

(4)阿波罗尼奥斯问题

生于公元前 255 年的阿波罗尼奥斯,在专著《论相切》中提出了一个著名的问题:给定三个元素,点、直线或圆,求作一圆通过三点(若为三点),或与给定的各直线或圆相切.

过不在同一直线上三点作圆,或作一圆与三条两两相交的直线相切,即作三角形外接圆、三角形内切圆,都是其中的问题. 4 世纪,希腊学者 Pappus 研究过《论相切》,把阿波罗尼奥斯提出的问题划分为十种情况,记述详尽.

对于作一圆与另外三个圆相切的问题,极为复杂,此即是阿波罗尼奥斯问题.①从公元前 200 年一直到 17 世纪许多数学家为之绞尽脑汁. 韦达(1540—1603)在其专著《Apollonius 问题》,牛顿(1643—1727)在《广义算术》中都进行了较深入的研究. 后来,蒙根(Monge)、高斯等数学家也进行深入研究,给出了众多的解法.

日本的寺阪英孝、我国的沈康身先生对这三个圆的位置关系进行细致的研究. 他们把"作一圆与另外三个圆相切的问题"给出了极其有趣的分类,用相交(记 J)、相切(记 Q)、相离(记 L)各种不同的排列形式去考虑. 因而,三个圆的位置关系共有十种:

① LLL ② JJJ ③ QQQ ④ LJQ ⑤ LLJ

⑥ LLQ ⑦ QQL ⑧ QQL ⑨ JJQ ⑩ JJL

① 沈康身. 历史数学名题赏析[M]. 上海:上海教育出版社,2002:649-656.

每种情况又可分为若干子目.日本的寺阪英孝把阿波罗尼奥斯问题分为49个子目,我国的沈康身先生把上面分类进行改编,增补为51个子目,这种分类是否详尽无遗?沈康身先生还认为,这有待进一步深入探索.具体对阿波罗尼奥斯问题的研究,可翻阅沈康身著《历史数学名题赏析》.

第四节　尺规之作图:思维的挑战

> 在整个数学史上很难找出像这(尺规作图)三个问题那样具有历久不衰的魅力.希腊人的巧思,阿拉伯人的学识,西方文艺复兴时期大师们的睿智,都曾倾注于此而得不到丝毫结果.实际上这三大问题都是不可能用直尺圆规经有限次步骤来解决的.①

自古以来,规、尺均是东、西方不可缺少的作图工具.在中国,有"伏羲手执规,女娲手执矩",用矩画线段.早期,西方尺规作图风靡全球,尺规作图是《几何原本》中最有特色的部分.《几何原本》中头三个全是作图题,如:"给定一线段求作一等边三角形","画一线段,使之等于给定线段"等.尺规作图可谓历史悠久,影响深远.尺规作图是指只用直尺和圆规来作图.而直尺没有刻度,只能画线段,圆规只能画圆(或弧).一般地说,尺规作图题看似简单,但要求苛刻,是挑战人类思维极限的问题.几何作图理论色彩较淡,但又对智力要求较高,对数学思维训练效果突出.作图题要求的条件简单,只要圆规和直尺,通俗明白,又具有挑战性,容易吸引许多爱好者跃跃欲试,潜心钻研.正如柯朗所说,几何学中作图题是人们最喜欢的课题.几千年来,尺规作图繁衍出许多经典作图题,谱写了一曲曲可歌可泣的故事.

① 梁宗巨.数学历史典故[M].沈阳:辽宁教育出版社,1992:191.

高斯因完成正十七边形的尺规作图而终身投入数学事业. 尺规作图是他人生的转折点. 尺规作图有着无限的魅力,吸引无数人为伊消得人憔悴.

1 三大经典尺规作图

平面图形中最基本对象是线段和角,线段可任意等分,而角任意等分就不好说了,如三等分任意角,古希腊人面临的基本尺规作图问题. 平面中最常见的图形是圆和方,求作一个正方形与已知圆等积是古希腊学者很容易想到的问题. 立方体加倍应当是简单的尺规作图. 如此构成了难倒公元前 5 世纪古希腊数学家三大尺规作图:

三等分角问题:将任意给定的一个角三等分;

化圆为方问题:求作一个正方形,使它的面积与已知圆的面积相等;

立方倍积问题:求作一个立方体,使其体积是已知立方体体积的二倍.

这三个尺规作图题是对人类智慧的巨大挑战. 从古到今,从西方到东方,顶级智商的数学家前仆后继,如古希腊的希波克拉底、阿奎塔示、阿那克萨哥拉、门奈克木斯、埃拉托色尼、阿波罗尼斯奥等致力于尺规作图问题的解决,尤其是阿基米德、达·芬奇、高斯、拿破仑等大数学家、大画家都投身于尺规作图三大问题,有名的、无名的都钟情于尺规作图. "它已证明是曾设计出来的最引人入胜的博弈之一". ①消耗人类两千多年时间,三大尺规作图仍毫无进展. 当今世界还有些人仍痴迷于尺规作图三等分角的问题,周伯壎"衷心地奉劝对这个问题有兴趣的人们,不要再浪费时间去研究三等分角的问题了,因为这完全是徒劳的."

追溯三大作图问题,我们对《柏拉图》中记载的神话刻骨铭心:立方倍积问题即提洛斯问题. 当年,古希腊提洛斯鼠疫疯狂,有人说接到神的谕示,加倍立方体的神坛方可消灾. 如何加倍,使工匠们很为难,只好请教哲学家柏拉图. 原来,神的真正旨意,在于让希腊人为忽视几何而羞愧,而不在于神坛的加倍.

---

① H. 伊夫斯. 数学史概论[M]. 太原:山西人民出版社,1986:100.

一个意外的报道：存在了2000多年化圆为方的问题，现有匈牙利数学家拉兹科维奇找到了用尺和圆规作出正方形的方法. 他证明了任何一个圆都能被划分为有限个各种各样的几何部分，而这些图形可以构成一个正方形. 他用了40页纸阐述他的证明方法，美国几位数学家，作了认真的审查，“所有专家都认为证明是无可指责的”……难道旺策尔和林德曼在1837年和1882年的论断不正确？正确的结论要能够经得起历史的考验. 兰纪正认为这是不可能的，他只将这一消息告诉大家，并说这不是鼓励大家再去用尺规研究三大几何难题. ①

2　尺规作图的“插柳成荫”

三大几何尺规作图问题曾是历史上经久不衰的历史名题，吸引了无数的数学家及爱好者，大家绞尽脑汁，做了无数次的尝试，均无果而终. 后来，有些人另辟蹊径，悟出别的方法，柳暗花明又一村，只是不太符合尺规作图的要求. 作为新的尝试，这也未尝不可.

(1)三等分任意角问题

自古以来，不知有多少人一直致力于三等分角问题. 最早的恐怕要数希比阿斯、阿基米德. 智人学派的希比阿斯（约公元前400）为三等分任意角，发明了“割圆曲线”. 在任意角的一边任取点 A，如图4－60，作正方形 $OACD$，将一直线从 DC 处匀速下降至与 OA 重合，与此同时一直线绕点 O 旋转从 OD 顺时针匀速转动与 OA 重合. 两者同时出发，同时在 OA 重合. 在重合之前，两者交点的轨迹就是割圆曲线. 设 $OA=a$，则割圆曲线方程为

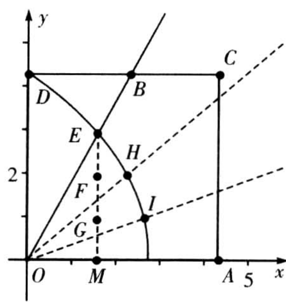


图4－60

① 莫德. 欧几里得几何原本研究[M]. 呼和浩特：内蒙古人民出版社，1992：178.

$$x=\frac{y}{\tan(\frac{\pi y}{2a})}.$$

设$\angle AOB$边OB交割圆曲线于点E，过点E作EM垂直OA，垂足M，将EM三等分得分点F，G，分别过点F，G平行于OA交割圆曲线于点H，I，连OH，OI，则三等分$\angle AOB$.

实际上，利用割圆曲线能将任意角三等分，也可用来化圆为方. 但终因没有使用符合规定的工具，问题还是没能解决.

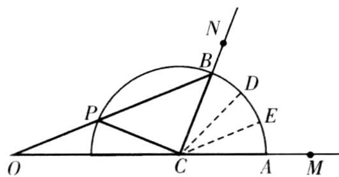


图 4－61

阿基米德曾使用带刻度的尺子，对三等分任意角问题给出一种非常简单、明快的方法. 这让我们耳目一新，眼前一亮. 设$\angle AMN$为所要三等分的任意角. 如图 4－61，阿基米德以C为圆心，CA为半径作半圆交角另一边于点B，直尺的端点为O，再找一点P，使$OP=CA$. 让直尺过点B，并移动直尺使点O在边CA的延长线，P点在圆周上，连O、P、B. 由于$OP=PC=CB$，可知$\angle COB=\frac{1}{2}\angle CPB=\frac{1}{2}\angle CBP$. 过点$C$作$CE$平行$OB$，再作$\angle ECB$的平分线. 于是$CE$，$CE$即为$\angle ACB$的三等分线. 阿基米德还有更简便的方法，即利用他发明的三等分角仪便可把任意角三等分.

显然，阿基米德三等分角的方法不符合尺规作图的规定，他使用有标识长度刻度的直尺. 曾经，有不少的数学爱好者沉迷于三等分角等尺规作图，对此数学家华罗庚郑重指出：仍痴迷三等分角的尺规作图，会让你的聪明才智白白挥霍一空. ①

(2)立方倍积问题

立方倍积问题，关键点是希波克拉底能对问题进行“简化”. 他认为立方倍积问题可以化为求一条线段与它的二倍长线段之间的双重比例中项

① 梅向明，等. 尺规作图话古今[M]. 长沙：湖南教育出版社，2000：5-6.

问题：$a:x=x:y=y:2a$. 前述双重比例式等价于方程：

$$x^2=ay, y^2=2ax, xy=2a^2, x^3=2y^3.$$

因此 x,y 应为两条抛物线的交点或一条抛物线与一条双曲线的交点之坐标，x 即为所求二倍立方体的边.

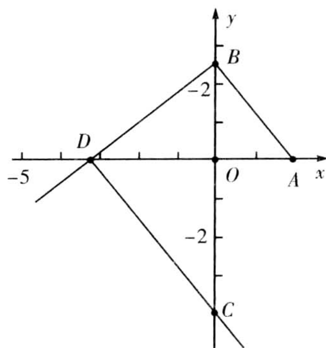


图 4-62

作两条相互垂直的直线 x,y，交于点 O，在 x 上截 $OA=a$，在另一条直线上截取 $OB=2a$，a 为立方体的棱长，在 x,y 分别取两点 C,D，使 $\angle ACD=\angle BDC=90°$. 如图 4-62，此时，线段 OC 长即为立方体棱长. 由射影定理，

$$OC^2=OA\cdot OD=a\cdot OD,$$

$$OD^2=OB\cdot OC=2a\cdot OC,$$

消去 OD，得 $OC^3=2a^3$.

狄奥克莱斯（公元前 200）利用蔓叶线把立方体加倍. 韦达、笛卡尔、费马与牛顿也发展了立方体体积加倍的方法. 牛顿为此目的利用帕斯卡蜗线. 当然，这些方法没有一个限制它要用无刻度的直尺和圆规. ①尼科米迪斯（约公元前 250）发明了蚌线，方程是 $(x^2+y^2)(y-a)=b^2y^2$，可用来解决立方倍积问题，亦能解决三等分任意角问题. 可惜，达不到尺规作图的要求.

（3）化圆为方问题

用圆规、直尺化圆为方即作一正方形，使其面积等于给定圆形的面积. 三等分角即三等分弧. 公元前 430 年，享有盛名的希波克拉底，利用圆的特征把曲线面积化为直线形面积的方法，把两个半月形的面积化为三角形的面积. 如图 4-63，等腰直角三角形 ABC，以 AB,BC,AC 为直径分别作三个半圆，整个图形除去以 AB 为直径的半圆，得到两个半月形.

---

① B. 波尔德. 尺规作图的历史[M]. 郑元禄，译. 北京：高等教育出版社，2008：27-44.

古希腊的伊利斯的希尔阿斯(公元前425)发明了"割圆曲线".此曲线既能解决三等分角问题,又能解决化圆为方问题.还有阿基米德曾用阿基米德螺线成功解决化圆为方问题.①

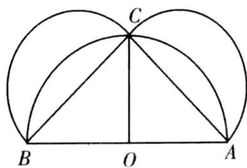


图4-63

尺规作图问题,受到文艺复兴时期的艺术大师达·芬奇的关注.达·芬奇曾给出化圆为方的妙解:取一圆柱,其底面圆与已知圆全等,高是底面圆半径的一半,让圆柱滚动一周得到矩形,其面积恰好等于已知圆面积.矩形化为等积的正方形容易解决,可惜使用的工具不符合尺规作图的要求,也不没真正解决化圆为方尺规作图的问题.

最后,三大尺规作图问题最终认定是不可能完成的任务.意大利数学家鲁菲尼(1762—1822)和挪威数学家阿贝尔(1802—1829)、万策尔(1837)、林德曼(1882)研究成果均说明,三大几何作图问题只用尺、规是不可能完成的.历时两千多年,三大尺规作图问题最终被人类的智慧所征服!

3 单尺、单规作图

三大几何作图问题被征服后,人类智慧又在别的地方展现出来,并寻找新的领地,去接受更大的挑战:单尺、单规等作图问题.大约在980年,阿拉伯数学家提出过用直尺和生锈圆规作图.单独用圆规或直尺完成作图,称单规或单尺作图.

18世纪意大利几何学家马斯开龙尼在《圆规几何》中提示,只要给定的和求作的均关于点,单规就能完成作图.法国数学家庞加莱(1788—1867)考虑单尺作图,并认为,作图平面上只要存在一个圆及圆心,单尺也能完成作图.许许多多的爱好者思考单尺、单规作图问题.

无独有偶,还有一个让人意想不到的拿破仑与(拿破仑)圆.拿破仑对数学颇感兴趣,在他的军旅生涯中,阅读数学书籍成为习惯,他对单规作图十分感兴趣,在马背上还在单规作图.利用单规对圆四等分,如图4-64,让

① 梅向明,等.尺规作图话古今[M].长沙:湖南教育出版社,2000:8.

拿破仑沉醉喜悦当中，满面春风. 真是妙不可言！单规四等分后的圆被称为拿破仑圆.

挑战单尺、单规等作图题的成功，不知让多少人乐在其中，享受愉悦. 他们执著单尺、单规，痴迷几何作图，今天回味也倍感精彩无限，让人享受愉悦，体验历史，品味数学经典. 经典之所以经典，在于它以独特的无与伦比的方式触及人类的灵魂，以及人类无限的思考，无论深度还是广度，后人都无法企及，无法超越.

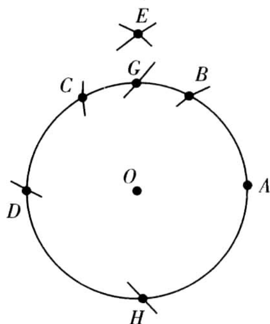


图 4 - 64

第五章　数学的发展:文化的传承

第一节　排列组合:游戏的文化

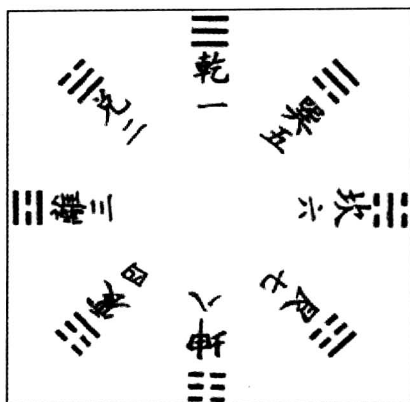
排列组合起源于东方的游戏. 田忌赛马、中国象棋、围棋、幻方、八卦、抓三堆、九连环、华容道、鲁班锁等许多古老的事例充分说明它的起源地.

排列组合是一个古老的数学问题. 张奠宙先生认为,排列组合是关于安排的一门学科. 有多少种排列组合的方式,怎样来安排,依什么样的排列组合方式,这是古代已有的问题,也是人类必须面对的问题. 排列组合源远流长,在中国、古印度、阿拉伯地区、欧洲早早萌发. 排列组合历史悠长,战国时期的田忌赛马、中国的象棋、围棋、欧洲的约瑟夫问题……各种各样的游戏都与排列组合有关. 历史上,有关排列组合的游戏,一方面让人娱乐消遣,趣味盎然,津津乐道,另一方面,能让人深深体验排列组合观念,培养统筹安排、处理事务的能力,提高办事效率. 排列组合既是古老的学科,也是新兴学科,为当今许多学科提供有力工具.

1　经典的游戏,排列组合的思想

排列组合起源于东方,成长于西方. 田忌赛马、中国象棋、围棋、幻方、八卦、抓三堆、九连环、华容道、鲁班锁等许多古老的事例充分说明它的起

源.中国排列组合的思想早已有之.编撰于西周后期的《易经》中有历史上最早的排列,根据阳爻(—)和阴爻(- -)两种符号进行排列,从2元多重中取3个的有重排列数为$2^3=8$,或从8元多重中取6个有重排列数为$(2^3)^2=64$,由此分别得到三线的八卦图,或六线的六十四卦图,如图5-1为伏羲八卦图.①宋代张行成的《翼玄》中给出了相当于从3个卦符中取$k(k=1,2,3)$个的组合数,元代张理的《易象图说》中给出了相当于从6个卦符中取$k(k=1,2,\cdots,6)$个的组合数.从伏羲的八卦图来看八卦,其构思巧妙、均衡和谐,简洁中渗透出玄机,体现出早期人类组合、排列的高超水平.还有曾影响世界的中国的河图、洛书,数学中的经典,都能体现排列、组合的观念.法国数学家贝尔热曾说:"懂得构造这种组态的困难,就不能说在中国古代不曾有过组合学".



伏羲八土卦图

图5-1

我国古代记载的故事《田忌赛马》就是排列的经典案例.战国时期,齐国王和大将田忌经常赛马,同等的马匹中齐王的马都比田忌的马要强,上、中、下三种马对应比赛,田忌总是输给齐王.怎样才能取胜呢?大军事家孙膑要求田忌调整三匹马参赛顺序,先用下马对齐王的上马,接着用上马对齐王的中马,最后中马对齐王的下马,结果二比一取得胜利.调整次序,反败为胜,齐王大为赏识孙膑,拜他为军师.于是有了历史上围魏救赵的经典故事发生.

还有扑克游戏中也隐含着组合观念.根据文字记载,公元969年时,中国已出现类似扑克的纸牌游戏.玩扑克时都会关注扑克游戏中纸牌的排

① 陈江辉.排列组合学习新简略三种[J].中学数学月刊,2003(6).

列、组合.扑克游戏的历史相当悠久,但来源的说法不一:法国人、比利时人、意大利人都说他们各自的祖先发明了扑克,除此之外还有埃及、印度、朝鲜等也说各自的祖先发明扑克.不过,更多的人还是倾向于中国人发明了扑克,由中国传入欧洲的时间大约在12—13世纪(南宋时期).

中国发明的围棋游戏中也含有排列组合.沈括在《梦溪笔谈》卷18中讨论了围棋的所有可能摆出的"棋局都数"."唐僧一行首算棋局都数,凡若千局尽之……凡方二路,用四子,可变八十一局.方三路,用九子,可变一万九千六百八十三局.方四路,用十六子……方五路,用十六子……尽三百六十一路……".

沈括根据与现今相同的19路361个点的围棋盘,举出了从2路4个棋子到6路36个棋子的例子,分别得到了排列数为$3^4,3^9,\cdots,3^{36}$,这些是11世纪沈括惊人的结果.我们可以发现,沈括清楚地知道重排列的计算方法,从3个不同元素中任取k个的重排列数是3^k.这与八卦中卦符的排列是类似的,即从n个不同的事物中取r个的排列总数.有一点可以肯定,中国排列数、组合数的计算规则是通过具体案例来体现,它不是离开具体的对象通过抽象的符号表示一般的计算公式.

还值得一说的是,中国古代的干支历.通过天干、地支的"干支历"纪日的传统方法在商代普遍使用,已有显著的排列组合思想.天干有十个:甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸.地支有十二个:子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥.把10个"天干"与12个"地支"有序排列为"甲子,乙丑,…,甲戌,乙亥,…,壬戌,癸亥",周而复始,成一循环.即从两个有序集中有序选取元素,依次以奇数对奇数,偶数对偶数的约束条件构成一组,它实际上给出一种设计.中国古代的占巫也有排列组合观念.①干支纪日是历史上最长的纪日法,从伏羲氏创建,夏朝已经开始使用,即从公元前720年2月10日记日,一直使用,从未间断.所以,干支历是使用时间最长、历史最悠久的一种历法.

---

① 刘建军.组合学史若干问题研究[D].西安:西北大学,2003.

2　“神秘”的西亚,古老的排列组合

古印度、阿拉伯的排列组合观念很早就有了,通过具体案例体现计数方式,借助具体事例揭示对排列组合的深刻认识.西亚的具体案例却往往带有“神秘”的色彩,如哈利神、散卜神等.当然,这说明西亚宗教历史悠久、源远流长.

古印度给出世界最早的组合排列计数方式.大约在公元前6世纪,苏斯鲁塔的医学论文中已有记载,从6种不同的味道物品中分别取1,2,3,4,5,6种的组合数,分别是6,15,20,15,6,1.这其实是二项式$(a+b)^6$展开时后六项的系数,现在我们都知道.

公元前300年左右,印度耆那教的文献也记载着排列组合的计数方法,从3个不同事物中任取1,2,3个时的排列数分别是P_n^1,P_n^2,P_n^3,从3个不同事物中任取1,2,3个时的组合数分别是C_n^1,C_n^2,C_n^3.

排列组合问题也有“神”的“烙印”.人类能构想出千手观音,印度教的哈利神有4只手也很自然了.印度教中的哈利神有4只手,4只手各拿着狼牙棒、铁饼、莲和贝壳,于是得到了4!种不同全排列,因而哈利神用4!种不同的名字命名.

在印度,排列组合计数已成为基本的数学常识.在约800年,马哈维拉给出了组合数的详细算法:

求从已知数目的物体中取不同数目的组合数法则:从1开始,逐次加1,直至加到与已知的数目相等,并按正常的顺序写下,再按逆序分别写成上下两行,如果上面行中的数1,2,3等从右向左取的积,被下面行中的数1,2,3等等亦从右向左取对应的乘积除,这样可以求出各种情况下组合数的结果.

事实上,数学家马哈维拉在这里已给出了n个物体中每次取r个的组合计数的公式,用现代方式表述成:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n+k-1)}{k!}.$$

但他并没有给出这一算法的任何证明.他把这一法则应用到两个具体事例当中:如前人一样计算味品的组合数;另一个是计算项链上宝石的组合数,这些宝石可能是钻石、蓝宝石、翡翠、珊瑚和珍珠.①

散卜神也曾进入了婆什伽罗(1114—1185)的排列组合问题中.在婆什伽罗的《立剌瓦提》中有一个著名的散卜神排列问题:散卜神的10只手中拿着绳、钩、蛇、鼓、头盖骨、三叉戟、床架、匕首、弓、箭共十件东西,若10只手交换拿这十件东西,共有多少种不同方式?他给出的答案是10!种不同方式.可以推广到一般,把n个不同元素进行全排列,所以排列种数是$n!$.

婆什伽罗还举例说明计算n个里取r个的组合数的方法,一个技术高明的工程师为贵族设计了一座带8个门的宏伟宽敞的大厦,说出取1,2,3,…,8时的组合数.婆什伽罗认为,打开1个门有8种方法;打开2个门有28种方法;打开3个门有56种方法;等等,则打开1,2,3,…,8个门的总方法数是225.婆什伽罗还首次给出了n个物体中分别有$m,r,l,\cdots$个物体相同,则n个物体的全排列数为②

$$\frac{n!}{m!\ r!\ l!\ \cdots}.$$

1150年,婆什伽罗还总结出了组合计数的基本规则$C_n^k=C_n^{n-k}$,用来解答了许多问题,并认为组合计数公式,是一个普遍成立的法则,在艺术中计算开门的变化……在医学中计算不同味道的组合.

6世纪的花拉哈米西亚的著作中给出了一些稍大的组合数,“如果16个为一组的物体以4种不同方式变化,那么不同结果数是1820”,当时的印度文献中并没有求组合数的公式,但花拉哈米西亚的著作中好像引用一个类似于推导帕斯卡三角的标准方法,逐一得出了这些组合数.③

伊斯兰也取得了优秀的排列组合成果.伊斯兰的伊本·阿尔班纳

---

① 刘建军.组合学史若干问题研究[D].西安:西北大学,2003.

② 刘建军.组合学史若干问题研究[D].西安:西北大学,2003.

③ 刘建军.组合学思想的东方起源[J].西安:西北大学学报(自然科学版),2001(10).

(1256—1321)给出了可以求组合数的乘法公式，这要早于印度；他还研究了物体组合的抽象的组合. 阿尔班纳用计数的方法证明了

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}.$$

"如果元素 a_1 与另外 $n-1$ 个元素中的每一个组合，a_2 与另外 $n-2$ 个组合，等等，那么 C_n^2 便等于 $n-1$，$n-2$，$n-3$，…，2，1 的和."然后他解释了求任意 C_n^k 的方法，我们总可以用一个已知的数乘以前一个被求的组合数来确定当前所求的组合数，再在这个乘积中取出组合数. 即用现代的数学符号表示的公式①：

$$C_n^k=\frac{n-(k-1)}{k}C_n^{k-1}\cdots\cdots(1)$$

他以 $k=3$ 为例为上组合公式进行说明. 若从 n 个元素中任取 2 个的集合分别与剩下的 $n=2$ 个元素组合，可得到 $(n-2)C_n^2$ 个不同的集合，又因为 $C_3^2=3$，所以这些集合中的每个都重复了 3 次，因此则从 n 中任取 3 个的组合数为 $C_n^3=\frac{n-2}{3}C_n^2$，同理有，$C_n^4=\frac{n-3}{3}C_n^3$，对任意 $k(k<n)$，组合公式(1)成立. 也由 $C_n^k=\frac{n-(k-1)}{k}C_n^{k-1}$ 得到：

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots1}.$$

3　欧洲的排列组合，生活中的案例

排列组合是中学数学的核心内容. 经典的案例促进对排列组合的理解. 过去的欧洲，曾受印度、阿拉伯对排列组合的处理方法的影响. 许多欧洲人对排列组合感兴趣，提出了许多经典的案例，如字母的排列组合案例，行星的组合，这些背景材料被大家熟悉、明了.

利用字母研究组合数：不晚于 8 世纪的轶名的《天地万物》专著中，作

① 刘建军. 组合学史若干问题研究[D]. 西安：西北大学，2003.

者曾计算过22个希伯来文字母的各种排列方式. 他认为,"上帝抽取和组合字母,斟酌和交换字母,且用字母产生了整个宇宙和预定要创造的一切……两个字母组成两个单词,三个组成六个单词,四个组成二十四个单词,五个组成一百二十个单词,六个组成七百二十个单词,七个组成五千零四十个单词". 依此可推测,他知道 n 个字母所有可能的排列数是 $n!$. 一位意大利的犹太教教士,沙比太・多诺罗(913－970)对《天地万物》进行评注,非常明确地概括规律:

由两个字母(不重复地)组成单词,第一个字母可置换两次. 对于三个字母的单词的每一个打头字母来说,其他的字母能被置换形成两个由两个字母组成的单词来对应三次中的每一个打头字母. 三个字母的单词的所有排列对应于由四个字母组成的单词的每一个打头字母:三个字母的单词有六种方式,因此时于四个字母的单词的每一打头字母有六种方式——全部构成二十四个单词,依此类推.

利用行星研究组合数:天体中的行星历来是人类关注的对象,诚然,行星的组合也是人类关注的问题. 犹太教教士伊本・艾兹拉・亚伯拉罕(1090－1167),《圣经》的注释者,西班牙的犹太裔哲学家,曾对行星的组合进行详细研究. 伊本对从2到7的整数 k,算出了组合数 C_7^k. 伊本从七个"行星"(含太阳和月亮)任取两个,得到的组合数 $C_7^2=21$,等于从1到6的所有整数和. 计算三个一组的组合数 C_7^3,伊本认为,"先将土星和木星以及其他星体之一置于一起,其他星体的数量是5:用5分别乘以它的一半及二分之一,并相加,结果是15. 这就是涉及木星的组合数". 也就是,有木星的三元组合数是从其余的6个中任取2个的组合数为 C_6^2. 类似地,有土星而不含木星的三元组合数,伊本从剩余的5个中选取2个的组合数 C_5^2. 然后,有火星而不含木星和土星的三元组合数为 C_4^2,类似地,得到 C_3^2,C_2^2. 最终得出结论:

$$C_7^3=C_6^2+C_5^2+C_4^2+C_3^2+C_2^2=35.$$

伊本接着用类似的方法计算四元组合数 C_7^4,即有木星的组合种数是从

剩余的 6 个中选取 3 个组合数 C_6^3,有土星且不含木星的组合数,即从剩余的 5 个选取 3 个的组合数为 C_5^3. 如此地,有 C_4^3,C_3^3. 最后得到

$$C_7^4=C_6^3+C_5^3+C_4^3+C_3^3=35.$$

然后伊本又研究并给出了 C_7^5,C_7^6,C_7^7 组合数的结果. 实质上,他已经研究、论证了 $n=7$ 的情况,由此不难归纳、概括出一般的组合公式①:

$$C_n^k=\sum_{i=k-1}^{n-1}C_i^{k-1}.$$

利用字母研究排列数:14 世纪,莱维 · 本热尔松在代表作《计算技术》中对一些组合公式给出了细致、严密的证明. 莱维认为,给定的 n 个元素的全排列数等于 $n!$. 比如 $facde$ 是一个排列,莱维解释,由于原集合的全排列数为 P_n 个,那么,新集合以 f 打头的排列也应有 P_n 个. 另外,如果某一原来的字母,如 e,被新元素 f 置换,那么集合 a,b,c,d,f 的排列数是 P_n. 因此,新集合以 e 开头的排列数也应是 P_n. 因为原集合的 n 个元素的任一个,包括新字母,都能被置于打头位置②,由此便知,新集合的所有排列数是 $(n+1)P_n$. 所以 $P_{n+1}=(n+1)P_n$.

莱维由上规则,容易得到 n 个元素的全排列数变为 $n+1$ 个元素的全排列数的变化规律. 莱维分析说,由于两个元素的排列数是 2,等于 $1\cdot 2$;三个元素的排列数是 $3\cdot 2=3\cdot 2\cdot 1$,照此不断地进行下去……于是,得到结论,给定的一组元素的排列数等于从 1 到所给定的元素的个数的自然数的连乘积:

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1,$$

其中 P_n 表示 n 个元素的全排列数.

莱维还研究 n 个不同元素任取 k 个的排列数:

$$P_n=n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1),$$

如果所有元素的个数已定,且每次从中选取一部分,所选元素的个数

---

① 刘建军. 组合学思想的东方起源[J]. 西安:西北大学学报(自然科学版),2001(10).

② 张远南. 使人聪明的数学智力游戏[M]. 上海:上海科学普及出版社,1993.

也已定,这样的排列数是第三个数,那么,每次再从中多选取一个元素的排列数等于上述第三个数与第一个数和第二个数的差的乘积.①简单表示为:

$$P_n^{k+1}=(n-k)P_n^k.$$

至此,犹太人莱维·本热尔松(1288—1344)得到了印度曾发现的三个主要公式:

(1) n 个物体的全排列数为:

$n\cdot(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1$;

(2) n 个不同物体中任取 r 个的排列数为:

$n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)$;

(3) n 个物体中任取 r 个的组合数为:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

卡尔达诺也研究讨论过 n 个不同元素中取 k 个的组合问题,他得到了

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots1}.$$

还证明了 $C_n^k=\frac{n-k+1}{k}C_n^{k-1}$.

4 经典的排列名题,挑战人类思维

与排列有关的有"约瑟夫问题":将 k 个子排成一圈,在这个圈中以某子为起点,m 个 m 个地数子,将每次数到的第 m 个子去掉,直到去掉 $k-m$ 个为止.问:保留下来的 n 个子在原来的圈中应该排在哪些位置上?约瑟夫问题历史悠久,影响深远.

10 世纪后欧洲约瑟夫问题变为另一种形式:15 个穆斯林和 15 个基督徒乘坐一条船行驶在波涛汹涌的海洋上,为了不致沉没,一半人必须牺牲,于是 30 人排成圆圈,15、15 地数,每数到第 15 时,约定该人就被扔进大海.如何排列才能保证所有的基督徒得以保全?

---

① 刘建军.组合学思想的东方起源[J].西北大学学报(自然科学版),2001(10).

1898 年苏格兰数学家泰特对此问题给出了一般解,因而这一问题又被称为泰特问题.

5　经典的贾宪三角形、二项式定理

西方由于研究形数而产生排列组合数. 波菲利(232—304)把三角形数与"从 n 个不同物体中选取 2 个"相结合,从 n 个不同物体中选取 2 个的方法数等于第 $n-1$ 个三角形数. 帕普斯(260—?)考虑了另一种形式:n 条不同的直线,既没有两条平行,也没有三条交于一点,且每任意两条直线有一个交点,那么共有多少交点? 答案即为三角形数:

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

博伊修斯(约 475—525)讨论了波菲利的结论并予以推广:若考虑物体的顺序,则从 n 个不同物体中选取 2 个的方法数为$\frac{n(n-1)}{2}$,此即 n 个物体中任取 2 个的排列数. ①

系数三角形有许多优美的特点,如秩序井然、位置对称,由此得到帕斯卡三角形(1654),即贾宪三角形(约 1100),如图 5-2,这些还与二项展开式有关.

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
  …   …   …   …   …
```

图 5-2

阿拉伯第一部有关二项式定理的是萨马瓦尔的《眩惑》(1172),书中记载二项式系数表及其构造法. 西方第一次出现系数三角形是 1527 年在阿皮亚尼斯《算术》的封面上. 1654 年,帕斯卡的《论算术三角形》书中讨论了二项式系数、组合数的一致性. 由个元素、一个特殊元素 a 组成的 $n+1$ 个中取 k 个,不含 a 的组合种数有 C_n^k 个,含 a 的组合种数有 C_n^{k-1} 个,证明公式

---

① 刘建军. 组合学思想的东方起源[J]. 西北大学学报(自然科学版),2001(10).

$$C_{n+1}^{k}=C_n^k+C_n^{k-1},$$

思路独到. 帕斯卡数学归纳法证明了

$$C_n^k=C_{k-1}^{k-1}+C_k^{k-1}+\cdots+C_{n-1}^{k-1}, C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n,$$

以及二项式定理. ①

16 世纪，瑞士数学家雅各布·伯努利在《猜度术》(1713)中用组合公式证明了二项式定理. 到了 17 世纪，牛顿(1643—1727)给出了二项式定理的完整形式. 科学史家萨顿说过:"二项式系数三角形是抽象知识理解过程的一个显著事例，它被多次发现，继而湮没，再发现，直到这种抽象的东西被完全理解". ②

6 符号公式，人类的思维

排列组合公式的符号化是欧洲中世纪末的事情. 1321 年，生活在法国的数学家格尔索尼德(1288—1344)(又名格尔松)在他《计算者的书》中对排列组合进行的研究，并引用组合符号 $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ 或 C_m^n. 1772 年，旺德蒙德采用 $(n)^p$ 表示从 n 个不同的元素中每次取出 p 个的排列数. 1771 年，欧拉用 $\left(\frac{n}{p}\right)$，1778 年用 $\left(\frac{n}{p}\right)$ 表示从 n 个不同元素中每次取出 p 个元素的组合数. 1827 年，埃汀肖森引入了 $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$ 来表示同样的意义，这个组合符号沿用至今. 1830 年，皮科克引入 C_r 表示 n 个元素中每次取 r 个元素的组合数；1869 年或稍早点，剑桥的古德文用 ${}^np_r$ 表示从 n 个元素中每次取出 r 个元素的排列数. ③

1880 年，鲍茨用 ${}^nC_r$ 和 ${}^nP_r$ 分别表示从 n 个元素中每次取出个元素的组合数和排列数；1886 年，惠特握斯用 C_r^n 和 P_r^n 表示同样的意义. 1899 年，克

---

① 徐传胜. 概率论发展史研究[M]. 北京：科学出版社，2010：14.

② 刘建军. 组合学史若干问题研究[D]. 西安：西北大学，2003.

③ 徐品方，等. 数学符号史[M]. 科学出版社，2006：276-288.

里斯托尔用 nP_r,nC_r 分别表示从 n 个不同元素中每次取出 r 个元素(不重复)的排列数和组合数. 1904 年,内托为一本百科辞典写的词条中,采用 A_n^r 表示上述 nP_r 的意义. [1]关于阶乘,数学家施特拉斯堡的克拉姆(1760—1826),首先创立和应用阶乘符号 $n!$. 据说为了避免印刷上的困难,从此,"$n!$"沿用至今,并且他还给出定义 $0!=1$.

我们无法避开一种感觉,即这些数学公式自有独立的存在,自有其本身的智慧,它们比我们还要聪明,甚至比发明它们的人还要聪明. 我们从它们得到的,实比原来装进去的多(丹齐克).

第二节　概率名题:经典的数学

> 生活中最重要的问题,其中绝大多数在实质上只是概率的问题. 概率论的诞生,虽然来源于或然游戏,但在今天,概率论却成为人类知识的最重要的组成部分. [2]
>
> ——拉普拉斯

从历史上看,概率论是从赌博问题的研究中成长起来的,"出身"是不太光彩. 概率起源于掷骰子. 概率论从掷硬币、丢骰子这种低级的赌博开始,现在成为研究现实问题的重要思想. 法国数学家拉普拉斯曾说:"生活中最重要的问题,其中绝大多数在实质上只是概率的问题. "概率论的思想源于对博弈问题的讨论. 卡当的《论赌博》、伽利略的短文《关于骰子游戏的思想》、棣莫弗的《机会学的原理》、布丰的《偶然性算术试验》、惠更斯的《论赌博中的计算》、贝特朗的《概率的计算》等都是概率论中的经典之作. 拉普

---

① 贝尔热. 组合学原理[M]. 陶懋欣,译. 上海:上海科学技术出版社,1986:5.

② 徐传胜. 概率论发展史研究[M]. 北京:科学出版社, 2010:10-20,36.

拉斯曾说,一门开始于研究赌博机会的科学，居然成了人类知识中最重要的学科，这无疑是令人惊讶的事情.概率论是对人类无知的重要补偿.概率的内涵博大精深,源远流长.帕斯卡、费尔马等数学家从掷骰子、抛硬币等产生了许多历史名题,这些都是概率中的经典.经典之所以为经典,在于它以独特的无与伦比的方式触及、思考和表达了人类生存的基本问题,其深度和广度为后世难以超越,对人类具有永久的魅力.英国的逻辑学家和经济学家杰文斯说,概率论是“生活真正的领路人，如果没有对概率的某种估计，我们就寸步难行，无所作为”.①今天再来探讨这些概率经典,不仅能感受到它的真理性以及实用性,而且还能体验人类的理性精神和思索的深刻性.

1 概率历史中的趣闻

掷骰子的历史非常悠久,伴随时间的推移,留下了许多趣闻轶事.古时候,很多地方、许多人用骰子占卜命运,游戏赌博.1200 年前,罗马皇帝及大臣曾迷恋上掷骰子,痴迷于赌博.约 960 年,一位大主教已经有了掷骰子的经验,得到掷两颗、掷三颗骰子时的不同组合数.三次方程求根公式的发现者卡尔达诺也迷恋骰子 25 年,嗜赌如命;研究掷骰子赌博的经验铸成《论机会游戏》,是概率论方面现存的第一本书.伽利略也研究骰子游戏,长期观察研究,发现掷三颗骰子时点数和为 10 的次数比点数和为 9 的次数要多.

马尔柯夫,概率论专家,他为自己从事概率论而骄傲.每当回答什么是数学时,他总是以自豪、得意的口吻说:“数学,那就是高斯、切比雪夫、李雅普诺夫、斯捷克洛夫和我所研究的东西.”教学时总是引经据典、神采飞扬、滔滔不绝,乐在其中,在他那里枯燥的计算也变成了游戏,变为数字娱乐的享受.这一切深深地感染着每一个学生.马尔柯夫对数学的酷爱之情可见一斑.有人评价:毫无疑问,马尔柯夫是切比雪夫的最杰出的继承者和发展

① 徐传胜.概率论简史[J].数学通报,2004(10):36-39.

者,他们师生所具有的数学天赋几乎如出一辙……马尔柯夫的概率论文和其《概率演算》是概率论严密性的典范,他为概率论转化为数学的一个分支付出最大努力.马尔柯夫的个性鲜明,蔑视权贵,崇尚创新.在沙皇举行王朝建立300周年庆典时,马尔柯夫针锋相对,举办庆祝大数定理发现200周年庆祝活动.

贝叶斯,从样本推断总体的第一人,也令人费解,但特有个性.他一生仅仅发表过两篇数学论文,1736年发表的《流数术导论及对"分析学家"作者的数学家辩护》论文为他获得英国皇家学会会员的荣誉.这篇论文充分显示出他的数学才华.事实上,贝叶斯的主要成就是研究独立事件,且在统计推断、统计估算方面有突出贡献.①

柯西、拉普拉斯对概率论的看法存在巨大差异.拉普拉斯把概率论推广到社会科学,而柯西认为,还是在数学领域内探讨概率论,不必急于拓展其他领地,更不要通过数学公式研究历史,或用代数定理、微积分来批准和认可道德条例.概率论曾遭受柯西等数学家的强烈反对.鉴于拉普拉斯对数学的影响以及对他的敬畏,柯西只能对他的继承者泊松进行无情的讽刺和有力的打击.

为争取概率论的科学地位,促进学科发展,比埃奈梅与柯西、泊松等数学家展开了激烈争论.比埃奈梅承认,数学代表着绝对真理和有效性,随机现象也是科学的本性,不能说人类无知,人类也需要从偶然性中寻找事物的必然.还没有成熟的概率论可能成为错觉、误解的牺牲品.M.克莱茵认为,正是随机事件的概率,决定了我们对该事件的态度和行动.②

2　经典的游戏

文化的继承和发展,许多是从经典开始.经典中的智慧、谋略必定是大智慧.如上这些说明,掷骰子、抛掷硬币等是历史上人们常见的活动,也是

---

① 徐传胜.概率论发展史研究[M].北京:科学出版社,2010.

② H.伊夫斯.数学史概论[M].太原:山西经济出版社,1986:340-341.

概率论的经典案例，均直观地展现随机观念. 著名数学家德摩根、布丰、皮尔逊等对抛硬币乐此不疲. 表 5-1 就是历史上许多数学家抛硬币试验的记录. 这些试验表明：虽然每次抛掷硬币事先无法准确预知将出现正面还是反面，但大量重复试验时，发现出现正面和反面的次数大致相等，即各占总试验次数的比例大致为 0.5. 随着试验次数的增加，这一比值更稳定地趋于 0.5.

表 5-1 抛硬币试验的记录

试验者	抛掷次数(n)	正面次数(r_n)	正面频率($\frac{r_n}{n}$)
德摩根	2048	1061	0.5181
布丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

投针游戏最有名的是布丰问题. 布丰于 1777 年做了一次经典的投针游戏. 他拿出纸张，画满等距离的平行线. 接着，抓出一大把小针，其长度是平行线间距离的一半，一根一根往纸上扔. 边扔边计投针的次数，与平行线相交的次数. 最后，共投 2212 次，与平行线相交的有 704 次. 总数 2212 与相交数 704 的比值为 3.142，即是圆周率 π 的近似值！这是有依据的：如果纸上两平行线间相距为 d ，小针长为 1 ，投针的次数为 n ，所投的针当中与平行线相交的次数为 m ，那么当 n 相当大时有：

$$\pi\approx\frac{21n}{dm}.$$

就是赫赫有名的布丰公式！当针长 $d=21$，此时 $\pi\approx\frac{n}{m}$. 真让人没想到，投针竟然能计算圆周率 π. 布丰发表了《偶然性算术试验》的论文，引进了几何概率. 看似不可能的却偏偏有可能. [①]我们从中可以感受到，数学家

① 张映姜. 学习经典案例，体验数学文化[J]. 中小学电教，2012(11).

有着深邃的洞察力,以及超呼寻常的深刻思维.掷抛硬币、丢骰子、布丰抛针,不仅让我们认识到数学的经典,而且还能体验到人类文化的精致,以及人类高超的智慧.正如德国数学家普林斯海姆说,数学知识……其价值不仅在于它是一种有力的工具,同时还在于数学自身的完美.在数学的内部或外部的延伸、应用中,我们看到了最纯粹的逻辑思维,以及最高级的智能活动.

3　古典概型,经典的问题

文化的继承和发展,应该从学习经典开始.经典的学习重在返璞归真.古典概型是概率论中的传统,如摸球问题、分球入盒问题、随机抽数问题.棣莫弗的取白、摸球、蒙摩装错信封、生日问题等均为概率论的经典,这些经典案例不仅充分揭示随机现象的内部规律,从偶然中得到必然,还让我们直观感受到生活中的许多随机现象,体验人类思维高超的认识能力.关于机会游戏,欧拉考虑了问题:A、B 两人各有一副牌,每轮每人随机出一张,若牌同,则 A 胜,否则为 B 胜.他计算了每个人获胜的概率.①

棣莫弗与牛顿、哈雷是挚友.每当有人请教数学,甚至包括《自然哲学的数学原理》的问题时,晚年的牛顿总会说:"去问棣莫弗吧,对于这些事情,他知道的比我多."1718 年,棣莫弗出版了《机会学的原理》,书中设计了各种新的方法,对各种类似的点子问题、换球问题、年金等经典问题都进行了系统的研究,并采用和发展了概率符号.他还一反常态,从概率论原理中推导排列、组合公式.因而,他的许多研究成果被奉为概率论经典.如历史上经典的棣莫弗取白问题:

A,B,C 三人蒙着眼睛,从 12 个筹码中每次取一个,其中 4 白 8 黑.取法是,A 先取;随后 B 取;C 跟在 B 的后面;然后 A 再取……这样一直取下去.知道其中有一人第一次取到白筹码就算获胜,他们获胜的概率各是多少?

---

① 徐传胜.概率论发展史研究[M].北京:科学出版社,2010.

棣莫弗是这样计算的：

若 A 胜，则取白的概率：

$$P(A)=\frac{4}{12}+\frac{C_8^3\cdot C_4^1}{C_{12}^4}+\frac{C_8^6\cdot C_4^1}{C_{12}^7};$$

若 B 胜，则取白的概率：

$$P(B)=\frac{C_8^1\cdot C_4^1}{C_{12}^2}+\frac{C_8^4\cdot C_4^1}{C_{12}^5}+\frac{C_8^7\cdot C_4^1}{C_{12}^8};$$

若 C 胜，则取白的概率：

$$P(C)=\frac{C_8^2\cdot C_4^1}{C_{12}^3}+\frac{C_8^5\cdot C_4^1}{C_{12}^6}+\frac{C_8^8\cdot C_4^1}{C_{12}^9}.$$

则棣莫弗最终得到

$$P(A):P(B):P(C)=77:53:35.$$

棣莫弗针对取白问题提供创造性的解决办法，从中体验到棣莫弗解决概率问题的独到之处.

伯努利装错信封问题也是概率论中的经典. 伯努利装错信封问题：

某人写了 n 封信，以及与 n 封信对应的 n 个信封. 求所有的信都装错了信封的概率.

著名数学家欧拉称伯努利装错信封问题是数学上的“一个妙题”，并独立地解出了此题. 欧拉首先通过递推公式探讨信封装错的所有可能种数：用 A、B、C、…表示写着 n 位有人名字的信封，a、b、c、…表示 n 份相应的写好的信纸. 把错装的总数记作 $f(n)$. 假设把 a 错装进 B 里了，包含着这个错误的一切错装法分两类：

(1)b 装入 A 里，这时每种错装的其余部分都是与 A、B、a、b 无关，应有 $f(n-2)$ 种错装法.

(2)b 装入 A、B 之外的一个信封，这时的装信工作实际是把(除 a 之外的)$n-1$ 份信纸 b、c、…装入(除 B 以外的)$n-1$ 份信封 A、C、…，显然这时装错的方法有 $f(n-1)$ 种. 总之在 a 装入 B 的错误之下，共有错装法 $f(n-2)+f(n-1)$ 种. a 装入 C，装入 D……的 $n-2$ 种错误之下，同样都有 $f(n-2)+f(n-1)$ 种错装法，因此

$f(n)=(n-1)(f(n-2)+f(n-1))$.

这是递推公式,令 $n=1$、2、3、4、5,逐个推算就能解答伯努利装错信封的问题.

$f(1)=0, f(2)=1, f(3)=2, f(4)=9, f(5)=44$.

答案是 44 种. 一般地,当 $n>2$ 时

$$f(n)=n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

信纸装错信封的所有种数为 $n!$,于是装错信封的概率为

$$p=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}.$$

这就是数学史上著名的装错信封问题.

4　概率论的经典:赌金分配

经典是文化、精神的承载者. 赌金分配问题追溯的历史较长. 赌金分配问题真正引发概率研究,对概率论的诞生产生了重要影响. 1494 年,意大利数学家帕乔利在他的《算术、几何、比与比例集成》中提出问题:假如在一次比赛中先赢 6 局为胜. 两个赌徒的赌博在一个赢 5 局另一个赢 2 局的情况下因故中断,总赌注该如何合理分配.

帕乔利按赢的局数的比例分配,按 5∶2 分总赌金. 后来的卡当不苟同这个结果. 他认为,不能按已赢的局数分配赌注,而应按需要赢的局数分配:已赢 5 局的赌徒只需再赢一局,或另一赌徒则需连赢 4 局,才能得到全部赌金. 卡当分析:剩下几局只有 5 种结果,即第一个赌徒可能赢一、二、三、四次或全部输掉,所以总赌金以(1+2+3+4)∶1=10∶1 进行分配.

1652 年,贵族梅累向法国著名数学家帕斯卡提出历史上公平分配赌注问题. 为了回应赌金分配问题,帕斯卡与费马两人通信,一起深入探讨,得到一致的分配方案:赌金应按 15∶1 的比例进行分配. 他俩把赌金分配引向更一般的问题:两个赌徒相约赌若干局,谁先赢 s 局就胜利,现在一人赢 a 局,另一人赢 b 局,赌博中止,问赌金怎样分配才算合理? 进而,两人讨论

了参与者多于两人时的赌金分配问题，并取得一致的结果. 正如对概率论做出卓越贡献的法国数学家泊松(1781—1840)后来所说："由一位广有交游的人向一位严肃的冉森派教徒所提出的一个关于机会游戏的问题乃是概率演算的起源". [①]这个广有交游的人就是梅累，那位严肃的冉森派教徒就是帕斯卡. 帕斯卡与费尔马的赌金分配是概率中的经典问题. 1654 年，帕斯卡与费尔马间关于赌金分配通信讨论的信件也被认为是数学史上最早的概率论文献，是概率的经典. 数学天才帕斯卡认为，数学是对精神的最高锻炼. [②]费马与帕斯卡几次通信是为了解决点数问题，掷 8 次骰子为例讨论了赌金补偿问题.

帕斯卡承认自己原来的解答有误. 他对费马的解答很满意，认为这是给出此类问题的正确答案. 并回复费马说，"无论在图卢兹还是在巴黎，真理是唯一的".

圆满合作使帕斯卡和费马建立了深厚友谊，彼此欣赏对方的才华. 在信中，费马热情洋溢地邀请帕斯卡会面，"我非常想热烈地拥抱你，并奢望和你聊上几天几夜". 在回信中，帕斯卡表达了对费马的尊重，"一旦身体允许，我立刻就会飞到图卢兹，绝不会让您为我迈出一步". 然而最终两人未能见面. 这是世界上又一令人遗憾、沮丧的事情.

1713 年，雅各布《猜度术》第一卷对《论赌博的计算》作了更详细的注释，长度是原文的五倍，比原文更有价值.

笛卡儿预言惠更斯："在这个领域内，他的成就将超出所有的前辈."1657 年，惠更斯在帕斯卡与费尔马通信的基础上，发表了第一篇关于概率论论文《论赌博中的计算》，第一个把该学科建立在公理、命题和问题上而构成一个较完整的. 文章中引进重要概念"数学期望"：如果 p 表示一个人获得一定金额 s 的概率，则 sp 称为他的数学期望. 他还证明了：如果一个人获得金额 a 的概率为 p，获得金额 b 的概率为 q，则他可以希望获得金额 ap

① 韩雪涛. 从惊讶到思考：数学悖论奇景[M]. 长沙：湖南科学技术出版社，2007：121-122.

② 徐传胜. 概率论发展史研究[M]. 北京：科学出版社，2010.

$+bq$. 他在数学期望的基础上解决了许多概率问题,并且他认为,"无论如何我都认为,只要仔细研究这个课题,读者就能发现,事情不仅与游戏有关,这里实在是打下了一个十分有趣而且宽广的理论基础."帕斯卡与费马等人对赌金分配问题讨论、惠更斯的《论赌博中的计算》的成果,共同促进了概率论的产生和发展.

惠更斯通过卡卡维与费马联系讨论点数问题,费马向惠更斯提出了 5 个概率问题,惠更斯将其论文增加为 14 个命题和 5 个问题:"我相信,只要仔细研究这个课题,就会发现它不仅与博弈有关,而且蕴含着有趣而深刻的推理原则."并惋惜地说:"法国的杰出数学家已解决了这些问题,无人会把这个发明权授予给我."《论赌博中的计算》结构是引言、1 个公理、14 个命题和 1 个推论以及 5 个练习,利用这些定理和递推公式,解决了点数问题及其他博弈问题.①美国概率史家哈金认为,《论赌博中的计算》终结了漫长的概率概念形成过程,是概率论的肇始.

数学史家克莱茵(1908—1992)曾说:"数学和科学中的巨大发展,几乎总是建立在几百年中许多人所做点滴贡献的基础上.需要有一个人来走那最高最后的几步,这个人要能足够敏锐地从纷乱的猜测和说明中清理出前人有价值的说法,有足够的想象力把这些碎片重新组织起来,并且足够大胆地制定一个宏伟的计划."帕斯卡、费马、惠更斯就是走最后这几步的数学大师,当时没有使用"概率"概念,而是使用"机遇"概念.

5　概率悖论

朱自清说:"经典训练的价值不在实用而在文化."概率论不仅展示人们生活、实践中的经典案例,体现与生活的关系,更重要的是展现人类思维的冲突,数学结果不确定,即概率悖论.这些概率悖论让我们感觉迷茫,是生活本身真的出了问题还是认识上的问题,思维方式造成的悖论还是理论存在问题?莱布尼兹悖论、赌金分配问题、圣彼得堡悖论、达朗贝尔悖论、

① 徐传胜.概率论发展史研究[M].北京:科学出版社,2010.

赌徒的悖论、贝特朗悖论等众多有名的概率悖论，给我们造成思想上的困惑，方法上的迷茫.

圣彼得堡悖论让尼古拉·伯努利第二在数学界获得较高声望. 圣彼得堡悖论："彼得和巴维尔一起做投掷游戏. 约定：彼得掷一枚硬币，直至掷出'国徽'为止. 如果第一次掷出'国徽'，则巴维尔给彼得 1 卢布；如在第二次才出现'国徽'，则给彼得 2 卢布；若到第三次才出现'国徽'，则给彼得 4 卢布，若第 n 次投掷成功，则巴维尔要给彼得 21 卢布. 问在赌博开始前彼得付给巴维尔多少卢布才能公平？"随着 n 的增大，后来的结果虽然概率很小，但奖金值越来越大，易得每个结果的期望值均为$\frac{1}{2}$，故所有可能结果的得奖期望值之和为"无穷大". 这表明彼得需要付给巴维尔"无限大"的一笔款方可，但实际投掷结果显示其平均值仅为几十卢布. 因此这是个相当矛盾的结果. 丹尼尔、达朗朗贝尔、蒲丰、孔多塞等数学家都研究过彼得堡悖论. 在众多解决方案中，泊松的解法有一些新意. 因具有无限多财产的人是不存在的，故巴维尔答应"国徽"出现才付款，则是一种无法实现的契约. 对圣彼得堡悖论的条件稍作修改即可通过：

巴维尔支付款额 $2n-1$ 到不超过赌本为度，而由 $2n-1$ 超过其赌本的那个 n 值起则支付全部赌本. 如彼得赌本为 10000 卢布，有 $213<10000<214$. 第一个条件适于 $n<15$ 时，第二个条件则从 $n=15$ 后应用. 可算得彼得赢得数学期望为

$$\sum_{n=1}^{14}\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}+\sum_{n=15}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot 10000<7.62.$$

而若彼得的赌本为 109 卢布时，其赢得数学期望不超过 16 卢布，甚至当赌本增加到 1015 卢布时，即超过当时"全世界财产"的价值，彼得所赢的数学期望也不超过 26 卢布. ①

如贝特朗悖论：贝特朗悖论是以法国数学家贝特朗命名的，这一悖论

---

① 徐传胜. 概率论发展史研究[M]. 北京：科学出版社，2010.

也是经典的几何概率. 1889 年,贝特朗出版《概率的计算》书中有个非常有趣的"怪论":设圆的半径为 1,则内接等边三角形的边长为$\sqrt{3}$,在圆上任作一弦,求其长度超过$\sqrt{3}$的概率.

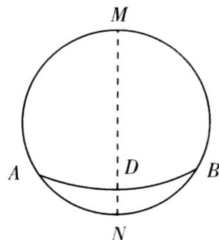


图 5 - 3

从问题表面上看,没什么特别的地方. 但从不同角度来处理,就会得到不同结果:

结论 1:如图 5 - 3,作圆的直径 MN,以 M 为圆心,$\sqrt{3}$为半径作弧 AB 交 MN 于 D,则当 P 点落在 DN 上时,有 $MP>MD=\sqrt{3}$,故所求的概率为 $P=\frac{DN}{MN}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

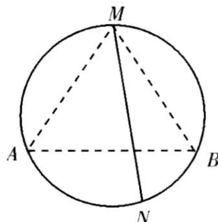


图 5 - 4

结论 2:如图 5 - 4,作圆的内接正三角形 MAB,则当点 N 落在 AB 上时,有 $MN>AB=\sqrt{3}$,

故所求的概率为 $P=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\text{圆周长}}=\frac{1}{3}$.

结论 3:如图 5 - 5,作圆的直径 MN,分别以 M、N 作圆内接正三角形,

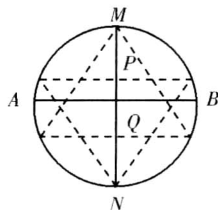


图 5 - 5

并使正三角形的一边与 MN 垂直,分别交 MN 于点 P、Q,则当弦 $AB\perp MN$ 并且与 MN 的交点在 P 与Q 之间时,有 $AB>\sqrt{3}$,故所求的概率为 $P=\frac{PQ}{MN}=\frac{1}{2}$.

结论 4:如图 5 - 6,在圆内任意作一条弦 AB,作出圆心 O 到 AB 的距离 d,则当 $d<\frac{1}{2}$时,有 $AB>\sqrt{3}$,故所求的概率为

$$P=\frac{\text{以 } O \text{ 为圆心,}\frac{1}{2}\text{为半径的圆面积}}{\text{大圆面积}}=\frac{1}{4}.$$

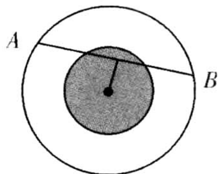


图 5 - 6

同一问题有三种不同的答案. 原因是,取弦时采用的对象尽管是等可能的,但基本事件不同. 第一种解法中,假定端点在圆周上均匀分布;第二种解法中,假定弦的中心在直径上均匀分布;而第三种解法中又假定弦的中点在圆内均匀分布. 这三种答案是针对三种不同的随机试验,在各自的基本事件确定情况下结果都是正确的. 这个问题之所以有不同解答,是因为在一随机试验有无穷多个可能结果时,有时很难客观地规定是哪一类"等可能事件". 这也反映了几何概率的逻辑基础是不够严密的. ①

第三节　微分积分:文化的成就

> 微积分的出现,与其说是整个数学史,不如说是整个人类历史的一件大事……数学史家常将数学比作一棵大树,树根是那些最基本的学科如算术、代数、几何、三角、解析几何等,树干的主要部分就是微积分,顶上的树枝是名目繁多的各门数学。微积分堪称是人类智慧最伟大的成就之一. ②

微积分是数学发展史上的里程碑,是欧氏几何后又一次伟大的创造,人类历史上又一重大成就. 这一成果是人类思维的再次重现,历史具有惊人的相似. 先有积分后有微分,恰如先有对数概念再有指数一样. "积分是微分的回忆",A. 德·摩根曾戏谑说:"求面积、体积和弧长引出求和,产生积分运算. 稍后,求曲线的切线、函数最值产生微分运算. "两类重要运算积分、微分存在互逆关系,这就是牛顿、莱布尼兹的天才发现. 微分、积分运算

---

① 王晓. 非一般的数学课堂,非一般的教学情境[J]. 广东教育(综合版),2006(3).

② 梁宗巨. 数学历史典故[M]. 沈阳:辽宁教育出版社,1992:452.

产生及其互逆关系的发展历程决定着微积分产生发展. 追溯微分、积分的演绎历程,可以发现托里拆利、费马、伽利略、巴罗、牛顿和莱布尼兹等众多数学家对微积分互逆运算的萌芽产生概括抽象的思考历程.

1　距离与速度中隐含的微积分

伽利略、托里拆利、费马等数学家的许多研究工作,都是通过具体的几何案例揭示出距离与速度或面积与变化率之间的关系. 这里面隐匿着微分、积分互逆关系. 当时,存在的是实际上的积分而不是真正的积分,微分还是无穷小的形式,这种关系是模糊的,并且都是借助于几何进行的,而不是算术的或代数的. 微分与积分互逆关系都是通过个体运动的距离与速度问题进行概括、体现. 奥里斯姆的经线与纬线把连续的运动与几何图示联系起来. 如图 5－7,在匀速运动时,在时间纬度 OA 内速度相同,长方形 $OCDA$ 面积表示运动的距离;奥里斯姆与伽利略一样,若匀加速运动时,如一物体以变速 $v=32t$ 运动,速度用直线 OB 表示、因为 $OA=t$,则 $OB=32t$. 那么,物体在时间 $OA(t)$ 内运动的距离就是 $16t^2$,即三角形 OAB 的面积 $S=16t^2$. 所以,速度 v 与时间 t 所形成曲线下的面积就是距离 S. [①]而距离 $S=16t^2$ 的变化率必定是速度 $v=32t$. 所以,面积可看作是"和",它的变化率必定是面积函数的导数. 伽利略也只是指出其变化率与面积的关系、速度与距离的关系,没有从距离的瞬时变化率与速度联系起来,更没有从面积的瞬时变化率去研究. 同时,积分、微分概念没有形成,只是知道求面积、体积,这其实就是"实际上的求积分". 求积、瞬时变化率只是在几何中进行,它们的关系更加隐蔽. 变化率是积分的反问题. 深入思考,容易发现,速度与面积的变化率是一致的,这一几何结果现在看来,似乎藏匿着"微分是积分的逆运算"观念,但隐晦不清. 事实上,托

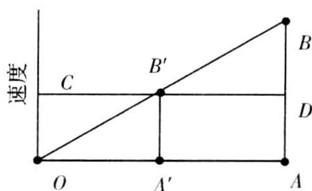


图 5－7

---

① [美]M. Kline. 古今数学思想(2)[M]. 张理京,等,译. 上海:上海科学技术出版社,1979.

里拆利离积分运算还有些距离,离微分距离就更远了.

卡瓦列利的工作也萌芽着微积分的思想. 如图 5-8,卡瓦列利认为,平行四边形 $ABCD$ 内与 CD 平行的线段 EF 被对角线 BD 分成二段 PF,PE,设 $EF=c$, $PF=a$,$PE=b$,则平行四边形 $ABCD$ 所有直线段 c 的和与三角形 BCD 内所有相应直线段 a 的和的比为 2∶1,即 $\sum c=2\sum a$. 还推广到,平行四边形 $ABCD$ 所有直线段 c 的 n 次方的和与三角形 BCD 内所有相应直线段 a 的 n 次方的和的等于 $(n+1)$∶1,即

$$\sum c^n=(n+1)\sum a^n.$$

这与 $\sum a^n\Delta x=\dfrac{\sum c^n\Delta x}{n+1}$.

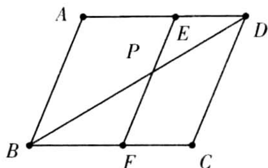


图 5-8

类似,这其实是积分求和的过程,这一结果用积分符号表示即是 $\int_0^c x\mathrm{d}x=\dfrac{c^{n+1}}{n+1}$……(1)

托里拆利、罗贝维尔、帕斯卡、费马、沃利斯等或多或少得到与(1) 等价的几何结果,这一结果还推广到包括负数、有理分数甚至无理数上.①由此看来,几何形式的微积分中积分、微分互逆关系是不太明朗.

格雷戈里曾研究切线、面积问题,有"切线问题是面积的逆问题"的影子,但未能以引起注意. 费马也只在特殊的例子中知道了面积和导数间的关系,没有加以深究并推广. 创立微积分的时机仍然没有成熟.

2 巴罗切线和面积中的微积分

17 世纪,微积分互逆关系仍隐匿在面积计算中. 但很多迹象似乎预示着积分可以由微分的逆过程求得,即求它的反导数. 巴罗,牛顿的老师,在《几何讲义》中,有了求曲线的切线和曲边梯面积间的关系. 如图 5-9,巴罗研究发现:在区间 $[0,x]$ 上,曲线 $y=x^n$ 下图形面积是 $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$,而曲线 $y=$

① [美]Carl B. Boyer. 微积分概念发展史[M]. 唐生,译. 上海:复旦大学出版社,2007.

$\frac{x^{n+1}}{n+1}$上某点切线的斜率是 x^n. 这具体例子也清楚地表明了切线问题和求积问题间的互逆关系.[①]

巴罗也意识到这个命题可以推广,由于表述形式是几何的,难以得到微分、积分运算间互逆关系. 形成"微分、积分间的互逆关系以独特的算法为一门新科学奠定基础"观念更加艰难了.

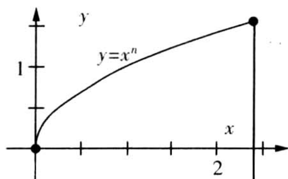


图 5-9

巴罗的确是微积分的先驱者.[②]他对求切线、求面积问题进行更深入研究:如图 5-10,建立坐标系 xOy,设增函数为 $y=f(x)$,曲线 BGE 与 x,y 轴围成曲边梯形 $BEDO$,其面积为 $Z=S(x)$,在坐标系 xOy 反方向作出坐标系 xOz,曲线为 OIF,点 $F(x,S(x))$是 ED 延长线与曲线的交点,取点 T 使

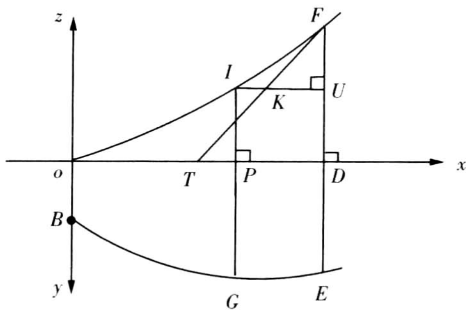


图 5-10

$$TD=\frac{DF}{ED}=\frac{S(x)}{y},$$

巴罗证明了是面积函数的曲线 OIF 在点 F 处的切线,若适当定义斜率,上述结论即相当于

① [美]Edward,C. H. 微积分发展史[M]. 张鸿林,译. 北京:北京出版社,1987.

② 郭彬彩,等. 数学史与数学家[M]. 西安:西安地图出版社,2002.

$$S'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=f(x).$$

巴罗的这一结果被公认为是微积分基本定理的最早形式. 巴罗也被认为是与微积分基本定理最接近的数学家. 但几何形式的结果使他难以把握,无法概括微积分运算,同时也没有意识到互逆运算的重要. 类似于让贤一般,巴罗把微积分创立者的机会也"让"给了牛顿.

3 牛顿的"流数术"

巴罗为牛顿留下太多的东西. 牛顿从那里获得很多启发,尤其是切线与面积间的紧密关系. 这对后来牛顿发现微积分间相互关系至关重要. "巴罗的几何讲座……包括他自己的求面积和曲线切线的方法——实质上分别是积分学和微分学的关键. 毫无疑问这些讲座激励牛顿开始投入他自己的工作"(贝尔). ①牛顿也去研究曲线的切线与曲边形的面积. 曲线为

$z=ax^m$……(2)

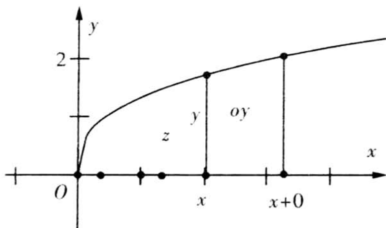


图 5-11

其中 m 是整数或分数. 用 O 表示 x 的无限小的增量,也称为 x 的瞬. 用 $z+Oy$ 表示由曲线、x 轴、y 轴和 $x+O$ 处的纵坐标围成的面积,其中 Oy 是面积的瞬. 如图 5-11,于是有

$z+Oy=a(x+O)^m$……(3)

从(3)减去(2),用 O 除方程的两边,再略去含有 O 的项,得到 $y=$

① [美]M. Kline. 古今数学思想(2)[M]. 张理京,等,译. 上海:上海科学技术出版社,1979.

max^{m-1}. 这说明面积在任意点 $P(x,y)$ 的变化率是曲线在点 P 的 y 值.

反过来,如果曲线是 $y=max^{m-1}$,曲线下的面积就是 $z=ax^m$,这是积分运算早已得到的结果. 用函数结合曲线,通过"瞬"揭示出曲线的切线和面积间的关系,即微分与积分的关系.

后来,牛顿将微分、积分问题陈述更清楚:已知两个流之间的关系,求两流数间的关系,以及它的逆问题. 已知给定的两个变量 y 和 x,假定流是 $y=x^m$. 如果 O 是"无穷小的时间间隔",那么 xO 和 yO 就是 y 和 x 的无穷小增量,或者说是 y 和 x 的瞬. 牛顿首先得到

$$y+\dot{y}O=(x+\dot{x}O)^m,$$

然后,用二项式定理展开[①],因为 $y=x^m$,用 O 除两边,略去所有仍然含有 O 的项,得到

$$\dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}.$$

牛顿还研究了分数指数幂函数的微分与面积间的关系. 尤其重要的是,牛顿不只是给出了求瞬时变化率的一般方法,更重要的是可以从求变化率的逆过程来求出面积. 里程碑式的发现终于由伟大的数学家获得. 1665 年 5 月 20 日,标志微积分诞生的日子. 牛顿承前启后,将貌似不相关的切线问题和求积问题联系起来,提出了"流数术",架设两者之间的桥梁. 全力攻击牛顿微积分的贝克莱主教也不得不承认:"流数术是一把万能的钥匙,借着它近代数学家打开了几何甚至大自然的秘密". [②]对于牛顿,莱布尼兹认为,"在从世界开始到牛顿生活的年代的全部数学中,牛顿的工作超过一半". [③]

4　莱布尼兹的符号运算中微积分

莱布尼兹也是微积分的创立者. 1673 年左右,莱布尼兹看到求曲线切

---

① 李文林. 数学史概论[M]. 北京:高等教育出版社,2002.

② 高希尧. 世界数学史略[M]. 西安:陕西科学技术出版社,1992.

③ Eves,H. 数学史上的里程碑[M]. 欧阳绛,译. 北京:北京科学技术出版社,1990.

线及反问题的重要，反问题其实就是积分，即求图形的面积或体积. 莱布尼兹还注意到，微分与积分(面积求和) 互逆，面积被微分时，必定给出长度. 莱布尼兹说，已知长度及它与的关系，求$\int l\mathrm{d}x$；假定$\int l\mathrm{d}x = ya$，则 $l = d(ya)$. 其中$\int$ 是积分求和符号，d 是微分求差符号. 这些符号沿用至今.

莱布尼兹认为，$y = f(x)$ 曲线下图形的面积 $z = z(x)$，且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y = f(x),$$

于是 $y\mathrm{d}x = \mathrm{d}z$，则原曲线下的面积

$$\int y\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}z = z$$

则面积问题化为反切线问题. 两者的互逆关系简洁地揭示出来了.

莱布尼兹研究发现，幂函数的微分、积分间有规则：

$$\mathrm{d}x^n = nx^{n-1}\mathrm{d}x \text{ 和} \int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

其中 n 是整数或分数. 他说："这个道理是普遍的，不管 x 的序列是什么样的."这里 x 仍然意味着序列的项的次序.

莱布尼兹分析道："研究不定求积或其不可能性的方法，对我来说不过是我称之为反切线方法的更广泛的问题的特殊情形(并且事实上是比较容易的情形)，而这种反切线方法包括了整个超越几何的绝大部分". ①莱布尼兹认为"求切线是在求差，求积是在求和". 他认为求和过程的积分是微分的逆运算. 莱布尼兹明确了积分与微分间的互逆关系，正如加与减、乘与除互逆这样简明的运算关系. 牛顿在《自然哲学的数学原理》中写道：十年前我已知道确定极大值和极小值的方法、作切线的方法以及类似方法，但在信件中隐瞒了这方法……他(指莱布尼兹)也发现了一种同样的方法……与我的几乎没有什么差别，除了他的措词和符号之外. ②可见，牛顿对莱布

① 柳成行. 简明数学史[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2008.
② 高希尧. 世界数学史略[M]. 西安：陕西科学技术出版社，1992.

尼兹给予很高的评价.

5　牛顿、莱布尼兹的微积分评述

牛顿、莱布尼兹从纷乱的猜测和说明中理清了思绪,敏锐地发现,微积分就是微分、积分这两类运算的问题.微积分的本质就是微分的“差”与积分的“和”互为逆运算,把求面积、体积的问题归到反微分,即积分.牛顿、莱布尼兹概括出更一般的规律,即微积分基本定理:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = f(x).$$

其核心是求得图形的面积

$$F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x.$$

这样,牛顿、莱布尼兹两人建立了一般化的、更具普遍意义的算术化的微积分.格雷戈里曾评价,数学的真正划分不是分成几何和算术,而是分成普遍的和特殊的.这归功于牛顿、莱布尼兹深邃的观察、睿智的头脑.[①]牛顿与莱布尼兹的贡献不仅在于他们认识到微积分互为逆运算这一数学事实,更重要的是从这些事实中总结出强有力的算法.牛顿、莱布尼兹理所当然的被认为是微积分的发明者,是人类文化又一个促进者.莱布尼茨和牛顿的历史功绩是,在微分(切线问题)和积分(面积问题)间架起了桥梁,使微分、积分成为一个整体.[②]当然,“微积分是牛顿和莱布尼兹大体上完成的,但不是由他们发现的”(恩格斯).牛顿谦虚地说:“我之所以比笛卡尔等人要看得远一点,那是因为我站在巨人肩上的缘故.”由于许许多多数学家的努力,传承发扬,牛顿、莱布尼兹终于找到微积分基本定理,为微积分学发展奠定了基础.

---

① [美]M. Kline. 古今数学思想(2)[M]. 张理京,等,译. 上海:上海科学技术出版社,1979.

② 孙小礼,张祖贵. 莱布尼兹与微积分[J]. 数学的实践与认识,1987(4).

第四节　精巧符号:数学之巧妙

数学符号的语言更加完善、准确明了地提供把一些概念传达给别人的方法. 利用了符号,数学上的每一个论断和它所描述的东西就可以更快地被人所了解.①

——罗巴切夫斯基

伽利略说:"数学是上帝用来书写宇宙的文字."数学语言是世界的语言,整个世界是用数学语言写成的. 但数学,也由于它的语言、记法以及看上去很奇特的符号,使一些人感到神秘莫测. 外行人还把数学设想成受冷酷无情的定义、法则、定理、公式和符号统治着的专制王国,里面充满着机械和单调. 其实不然,假如你对数学有一点了解的话,就会发现数学及其符号其实是一个充满着生气的瑰丽多姿的大千世界. 就数学符号本身而言,它有曲折迂回的发展历史,有简单精细的优秀品质;它的思想奇特得妙不可言,但外形又不缺乏图画般美妙动人;简洁实用是符号的最基本特征,寓意深刻是符号的基本作用;一个简单的式子,能将毫无关联的符号巧妙地联系在一起,蕴藏着丰富的思想;一个简单的符号,却在数学乃至科学上起着举足轻重的作用.

1　印度—阿拉伯数码,快捷、简便的计算

0,1,2,…,9 这十个印度—阿拉伯数码是数学王国的奠基石,是历史上三大计数技术的发明之一. 它用较少的符号,最方便地表示一切数和运算,给数学的发展带来了很大的方便,是一项卓越伟大的贡献,这也是其他记数符号无法超越的优秀品质. 拉普拉斯说,用十个记号来表示一切的数……这种巧妙的方法……才使我们的算术在一切有用的发明中列在首位;

① 易南轩. 数学美拾趣[M]. 北京:科学出版社,2004:232.

而当我们想到它竟逃过了古代最伟大的两位人物阿基米德和阿波罗尼的天才思想的关注时,我们更感到这成就的伟大了.十进位制也被誉为最伟大的三大计算技术之一."世界没有这种十进位制,就几乎不能出现我们这个统一化的世界了."九九口诀歌是中国十进位制悠久历史的见证.

沈康身在《数学的魅力》中说道:"中国和印度是最早使用十进制计数.汉语数字笔画多,且不连贯着写,又习惯自上而下成列,列又自右而左成文,这是汉语记数法的缺点."这阻碍了中国数学的进一步发展.对于十个数字,法国著名数学家拉普拉斯给予高度评价:"用不多的记号表示全部的数的思想,赋予它的除了形式上的意义外,还有位置上的意义.它之如此绝妙非常,正是由于这种简易得难以估量"."非常绝妙"并不言过其实,十个数字的的确确非常巧妙,妙不可言,区区十个数字加上十进竟然能表达任何数,又是记法如此简洁、运算上又是如此方便,"简易得难以估量".这是叹为观止的! 若对比罗马数码的运算,中国的数码不知道比他们方便、快捷多少倍了.

若对比罗马数码的演算,如计算 235 和 4 用罗马数码分别表示为和,两数相乘的计算过程非常的繁杂冗长.所以那时候欧洲人没有几个人能进行数的运算,倘若能做乘、除运算,他就是数学家了.现在,用印度—阿拉伯数码,无论哪里的小学生都能很快地进行加减乘除运算,并得到准确的计算答案.如图 5 - 12,是《零的历史》中一幅关于《阿拉伯数字的胜利》的图[①],是这样描述的:用阿拉伯数字



阿拉伯数字的胜利

图 5 - 12

① 卡普兰.零的历史[M].冯振杰,译.北京:中信出版社,2005.

进行笔算的人面带微笑，迅速计算完毕，又在计算另一道题；而使用筹码计算的，还在烦躁着、困苦地计算着，有些“无可奈何的感受”.①

印度—阿拉伯数码，在众多的记数数码中脱颖而出，成为世界通用的记数符号，它的确笔画少，书写简单，在数字的表示和数的运算方面，有令人惊异的简单、快捷. 意大利数学家斐波那契在其撰写的《算盘书》的开篇就写道：“这里的印度九个数码：9，8，7，6，5，4，3，2，1，还有一个阿拉伯人称之为零的符号 0……实在是一种理想的记数符号……”. 零的含义早就有了，中国古代有“三数无零”，即三个三个数能数完. 人类关于零的符号“0”表示是相当的精妙，但“0”源于何时、何地，真不容易考证. 有资料表明，七世纪时，中、印两国边界的石碑上有“0”记号. 所以，有人形象地比喻，“中国是 0 的父亲，印度是 0 的母亲”.②

印度—阿拉伯数字传播欧洲时，并不受到欧洲人的欢迎，特别是银行家和商人们非常抵触，反对使用. 他们认为，数字太简单书写，容易被人篡改，0 被人改为 6 或 9，这不能说不可能. 在中国古代弃置印度—阿拉伯数学也是出于这些数学太简单，容易涂改. 但正因为阿拉伯数字书写简单、计算简洁，最终被全人类接纳了. 的确，印度—阿拉伯数码表示数非常的方便. 它能轻易又绝妙地表示任何形式的数：不管多么大的数，如 234567 或更大的；还是很小的数：0.000132 或，它都能简洁又准确无误地表示出来. 尽管中国数码也简便，但还是有不方便之处，如这样的数字表示，中国数码难以表达. 印度—阿拉伯数码的另一魅力来自它的运算. 它的运算非常简单快捷，斐波那契曾称赞道，这是他遇到的最好的计算体系……我国学者也说过：用印度（阿拉伯）数码进行乘除运算，每个数码用一笔写成，当计到 10 时，就要进高一位，在每个空位上放一个点，于是每一位上都有一个数字，这样就不会发生定位错误. 有了这种数码，运算就变得容易多了.③

现代社会，秩序排列、计算、测量、量化、编号，信息数值化，数字无处不

---

① 卡普兰. 零的历史[M]. 冯振杰，译. 北京：中信出版社，2005.

② 徐品方，张红. 数学符号史[M]. 北京：科学出版社，2006.

③ 徐品方，张红. 数学符号史[M]. 北京：科学出版社，2006.

在.现代科学技术是信息技术,信息技术是数字技术,数字技术也是属于数学技术.如今社会,无论是谁,学生、教师、商人,大家对简单精美的印度—阿拉伯数码都运用自如,得心应手.

2　历史悠久的运算符号

日常生活中相关生活、生产实践活动中的增加、减少、倍数、均分等繁衍出加、减、乘、除运算.加、减、乘、除运算是人类生活概念数学化的结果.加、减、乘、除运算慢慢抽象概括为+、−、×、÷符号.完全有理由说,只要数统治整个世界,则加、减、乘、除的四则运算可以被看作是数学家的全部准备(麦克斯韦).+、−、×、÷这四个符号在生活和数学中被广泛使用.但如此简单好用的运算符号的形成却不是容易获得的,不可能一蹴而就的,它们经过了曲折而又漫长的发展历程.

追寻数学史的足迹,我们惊讶地发现,埃及纸草书中有表示加、减号的象形文字,加、减号的萌芽记载在世界上最古老的数学文献当中.许多民族也是用文辞的方式表示加、减号,如 2+1 写成 2 加 1.

3—15 世纪,人们使用的是缩写式的加、减号.加法符号,开始使用的是英文 plus(加)的字头 p.在德国,使用了相当于英语“and”(和)的词“et”.也有人认为:随着欧洲商业的繁荣,书写符号“et”也嫌慢了,为了加快速度,把两个字母连着写,因此“et”慢慢地变成了“+”.减法也是同样,使用英文 minus(减少)的字头 m,而它也是为了便于速写,逐渐变成了“−”.这只是一种有趣的说法,无从考证.15 世纪末,德国数学家的著作里出现的加、减号符号,它是由名不见经传的数学家维德曼发明.但由于他名气太小,没有引起人们的注意,响应者甚微.1544 年,德国数学家斯蒂菲尔在《算术大全》中大量地使用加号“+”、减号“−”,耳目一新,打破沉闷气氛;雷科德、克拉维斯和哈里奥特等数学家先后也大胆使用表示加减的符号,慢慢地用“+”、“−”的人多了,便开始流行了.这两个其貌不扬的数学符号“+”、“−”,真正地、正式地开始了参与数学加、减运算符号的历程.对于符号“+”、“−”,有名的学者怀特黑海给出的谚语特有意思,上帝把大海赐给了

英国，又把大陆赏给了法国，而云层却被分给了德国. 于是德国人从云层中获得了＋(加号)和－(减号)；而这些符号所产生的思想对人类幸福至关重要，这一切是无法从大海或大陆中获取的①.

乘号“×”出现也相当不容易. 在“＋”号出现了 100 年左右后，英国的奥特雷德首先使用了“×”作为乘号. 据说乘法符号是根据加法符号得来的. 这容易理解. 因为乘法是从求几个相同加数的和的运算发展而来，乘法运算是一种特殊的加法运算，所以数学家们将加法符号“＋”稍作变动，就得到如今的乘号“×”. 正如莱布尼兹看到的一样，“×”的确容易与 x 相混淆，所以用“·”作为乘号. 这样，“·”也得到了承认. 除法的符号“÷”是英国的瓦里斯最初使用的，后来在英国得到了推广. 除的本意是均分. 符号“÷”中间的横线把上、下两部分分开，形象地表示了“分”. 德国，莱布尼兹使用“：”代表除号，并一直沿用到现在.

迄今为止，乘除符号仍没有统一的×、÷符号，但不妨碍数学的交流与发展. 一符一义是我们的追求，天经地义的；一义多符也未必是一件遗憾之事. 波利亚认为：“在某些情况下用两种或更多的不同符号表示同一对象是有益的”②，它能使数学语言表达得更准确，更严密，也使人的思维严密谨慎，更容易理解和接受，不致混淆.

而根号的演变过程也非常有趣. 1637 年，笛卡尔巧妙地在路多尔夫、斯蒂文创用的符号“$\surd$”(拉丁文 radix(根)或英文 root(根)的字头 r 的变形)上面添上一个括线“—”，即用“$\sqrt{\ }$”表示平方根. 如果要开 n 次方根，就在左上角添上 n，即“$\sqrt[n]{\ }$”，多么简便啊！怪不得数学史学家们称这个十分简洁漂亮的“$\sqrt{\ }$”是数学家们一笔笔，一画画巧夺天工的艺术珍品”了. ③简直是神来之笔！

看起来一个简单的数学运算符号，都要经历非常艰辛、曲折而又漫长的发展历程. “看似平凡最崎岖，成如容易却艰辛”(王安石诗). 晦涩难懂的

---

① 莫里兹. 数学的本性[M]. 朱剑英，译. 大连：大连理工大学出版社，2008.

② 许海深. 谈数学中的符号及其美感[J]. 齐齐哈尔大学学报(自然版)，2004(4).

③ 徐品方，张红. 数学符号史[M]. 北京：科学出版社，2006.

符号容易遭历史淘汰,经得住历史的考验的往往是简洁精美的符号. 英国著名数学家哈代的一句话道出其中的道理:“美是首要的标准,不美的数学在世界上是找不到永久的容身之所的.”数学不断发展进步,人类的智慧无穷无尽,对美(简洁精美的数学符号)的追求也永无止境,不会盲从权威.

3　象形符号,直观、简洁

数学中的象形符号简洁、直观,逼真形象高度概括,临摹式的数学符号形象明了,简洁精炼,入木三分. 它是一种根据图形形状、对象的特征进行概括而形成的符号. 形象化的数学符号,一瞥就明白它所表达的意思. 直观化数学符号,降低符号的抽象,减轻记忆负担,能帮助我们更快捷地理解数学对象,便于数学形象思维.

现在使用的几何象形符号是古埃及的象形符号无法比拟,望尘莫及,不知要简洁优美多少. 如圆⊙,菱形◇,正方形□,三角形△,平行//,垂直⊥,角∠等. 这些符号既简单,又惟妙惟肖直观象形图性地示意了几何概念、命题、推理之间的相应数学关系. 几何象形符号一般是“仿图造符”,是原图形的压缩象形,非常的直观. 标记应该能使我们马上想到它表示的对象,而对象则能使我们想到标记. 一个数学家说过:一个好的标记应该便于记忆,便于辨认. ①莱布尼兹说:“符号的巧妙和符号的艺术,是人们绝妙的帮手,因为它们使思考工作得到了节约……应该考虑到使符号在解释说明上有所方便. 在很大意义上讲,符号扼要地表示了,就像是表示了聪明的实质. 在这里它以惊人的形式节省了思维”. ②只有简单直观象形符号才能帮助我们节省思维,使我们进行形象的思考,它是数学家们对简洁美的追求.

象形图性直观符号使用生动的几何图形来表露抽象的数学含义,揭示概念的内涵,我们能够通过符号形象特色,去掌握、去记忆,十分直观简单. 同时,象形符号也有简化语言的作用,如三角形可以写成△,三角形的面积可以写成 $S_{\triangle ABC}$,少了很多文字的累赘. 这些大写字母只是作标记,从来没

---

① 徐品方,张红. 数学符号史[M]. 北京:科学出版社,2006.

② 许海深. 谈数学中的符号及其美感[J]. 齐齐哈尔大学学报(自然科学版),2004(4).

有被用作运算符号，在几何图形上用来指示各个不同的点和元素. 这种描述性的记号，我们今天仍用来指明几何图形上的各个不同点，不要忘记，这种习惯是希腊人留下的遗产. ①

4 代数符号，交流工具

代数符号的诞生，是数学发展史上的一个里程碑. 它是抽象的、简洁的，看似空洞却内涵丰富；它看起来仅仅是一个抽象的符号，却蕴含着丰富的、生动的历史文化内涵. 它的内涵展现出数学世界里人类需要的丰富信息，让人类摆脱具体的局限，进入一般世界，为解决一般问题提供可能，实现具体向一般的突破. 这样，许多问题变为代数问题，变为符号游戏. 抽象的代数运算所研究的是有意地除去其实质的对象……符号不是空洞的形式，它是代数的本质. 没有这样的符号，对象就是人类的感知，它反映出人的感官把握对象的各个方面；用符号代替之后，对象变成了一个完全的抽象物，只是某一指定运算的运算对象而已. ②也正是代数的符号化，帮助人类探索事物的内在联系，促进了初等代数发展到高等代数和抽象代数的广阔领域，使其成为与几何媲美的一支庞大的代数分支.

代数史上的转折点乃是代数符号的使用，离不开 16 世纪后期弗朗西斯科 · 维叶塔的天才思想. 他的伟大成就今天看来十分简单：用一种技巧就解决问题，区别对待已知量、所求的或未知量，用一种有永久性质的、易于理解的符号体系，如用 a 或其他元音字母表示未知量，用 b，g 或其他辅音字母表示已知量. ③继维叶塔之后，笛卡尔用字母表开头的字母 a，b，c ……表示已知量，末尾的字母 x，y，x，w 表示未知量，这一直沿用到现在. 笛卡尔的记号取代了他们的记号，但他的用字母来表示未定的但保持不变的数量的精神被继承下来了. 英雄所见略同，韦达也提出符号字母表示的方法. 尽管维叶塔的主张形式上很少采用，但符号表示的精神无疑被传承

① 丹齐克. 科学的语言[M]. 苏仲湘，译. 上海：商务印书馆，1985：67.

② 张楚廷. 数学文化[M]. 北京：高等教育出版社，2003.

③ 徐品方，张红. 数学符号史[M]. 北京：科学出版社，2006.

下来了,这就是他的伟大贡献.

代数即字母代替数.有了字母表示数,数学中的一些概念,定理,性质,定理,法则,运算律等都可以用符号组成的式子表达出来.字母表示数,为符号代数打开了未知世界的大门.这种代数记号不仅只是一种形式,更不仅是一种方便、经济的速记,而是赋予了符号丰富的数学内涵.代数史上的转折点是法国数学家韦达建立的代数符号系统.①他在前人积累下来的经验基础上,有意识地,系统地使用字母表示数.他在代数中建立了抽象的符号.

亨利希赫兹说过:"我们无法避开一种感觉,即这些数学公式自有其独立的存在,自有其本身的智慧,它们比我们还要聪明,甚至比发明它们的还要聪明,我们从它们得到的,实比原来装进去的多."也就是说,字母符号或表达式的结构及特征等都有自己的思想内涵,且能告诉我们许多有价值的东西.它简化的记法,是深奥理论的源泉.

我们能读懂代数符号的语言,也能将自然语言翻译成符号语言,建立方程就是我们所谓的符号语言翻译.很多的时候,我们只需要看几个抽象的代数符号,就能思考和运算.代数符号是一种简洁、精确和清晰的自然语言,讲述着有关自然现象中深刻的东西,使公式由"哑巴"变成了会说话的人,并作出饱含深邃含义的回答.俄国数学家罗巴切夫斯基说:"数学符号的语言更加完善、准确明了地提供把一些概念传达给别人的方法.利用了符号,数学上的每一个论断和它所描述的东西就可以更快地被人所了解."

5　微积分符号,优美动人

在数学史上,微积分学的创立标志着进入重要的转折时期,微积分是数学史最伟大的成就,是数学发史上的一座里程碑.微积分中符号语言漂亮优美,对微积分的发展功不可没.莱布尼兹所创立的微积分符号表示是天才想法.莱布尼兹则致力于建立运算公式和创立微积分符号.莱布尼兹

---

① Denis Guedj.数字王国:世界共通的语言[M].雷淑芬,译.上海:上海教育出版社,2004.

的符号不仅简洁，而且反映了事物最内在的本质，减轻了想象的任务．由此，莱布尼兹被誉为“历史上最大的符号学者之一”．微积分中一套成熟漂亮的符号体系有效地促进数学学科的发展．18 世纪，分析的进步是在发展莱布尼兹微积分学的基础上发展所取得的．

微积分公式简洁优美，生动形象，内涵丰富．微积分基本定理

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

的符号表示，简洁明快，直观有序．积分符号$\int$是当之无愧的最优美的数学符号．如何创造这一精美的符号？传说之一，$\int$是数学家由拉丁文“summa”（和）的第一个字母 S 的拉长而成，传说之二，是由求和符号“$\sum$”号拉伸得来．不管哪种传说，不会影响$\int$的审美体验．从外形上看，$\int$像一身材高挑又极富曲线美的少女，在翩翩起舞．也有人认为，$\int$确实是数学中韵味十足的、曲线优美的少妇，总而言之，$\int$是不折不扣的“美女”．二重积分$\iint$恰如双人共舞，三重积分$\iiint$仿佛三人同台竞技表演的，无论视觉还是意境都给我们以美的享受．古今中外，人们对莱布尼兹的积分符号不乏溢美之词，数学大师们用一些美丽的辞藻赞颂，说是一件稀世珍宝，似肖像画，使人迷恋、陶醉；又似雕塑，风姿绰约，妩媚逗人；又似一音符，给人巨大感染、启迪、鼓舞．[①]无论怎样评价，都不为过。微分符号也不逊色，它则像是一对患难与共的夫妻，紧紧相依，挡着任何困难．

$\mathrm{d}x$，$\int$，∞，Δx，$\sum$，lim 等符号，一个个具有深邃的意境，似一丛芳草在春天的阳光下微笑，给微积分带来了生意盎然的春天；语言仿佛一长者，严谨而又严肃。这些数学符号展现数学大师们艺术创造和精神升华的完美图画．

① 许海深．谈数学中的符号及其美感[J]．齐齐哈尔大学学报（自然版），2004(4)．

第五节　数学之美:文化的魅力

> 数学家们非常重视他们的方法和理论是否优美,这并非华而不实的作风.那么,到底是什么使我们感到一个解答、一个证明优美呢?那就是各个部分之间的和谐、对称,恰到好处的平衡.一句话,那就是井然有序,统一协调……看清这个整体,就能意识到对象间的类似,就有机会作出猜想、推广.①
>
> ——庞加莱

英国数学家罗素曾指出:"数学,如果正确地看待它,则不但拥有真理,而且还有至高的美,这是一种雕塑式的冷而严肃的美.这种美既不投合人类之天性的微弱的方面,也不具有绘画或音乐的那种华丽的装饰,而是一种纯净而崇高的美,以致足以达到一种只有伟大的艺术才能显现的那种完美的境地."大量精美的数学内容越来越显示出其审美意义和价值.数学中体现的美不仅让数学家为之倾倒,而且天文学家、物理学家等都醉心于数学美之中.现代物理学家似乎形成这样一种信念:如果物理学中的数学方程在形式上不美,那就意味着理论上存在缺陷.很多人都崇拜数学美,历史上曾出现过数学唯美主义的思潮.英国物理学家狄克拉认为,数学中有一种迷人的魅力.并且,他一生中都表现出对数学美的追求,他通过漂亮的电子波动方程成功预测正电子的存在.数学美由此可以略见一斑.庞加莱认为,数学美的特征主要体现在数学的统一美、简洁美、和谐美、对称美、整齐美、符号美和奇异美等方面.

1　统一美

毕达哥拉斯学派认为:"数学是一切事物的本质,整个有规律的宇宙的

---

①　方延明.数学方法导论[M].南京:南京大学出版社,1999:106-107.

组织就是数以及数的关系的和谐系统.”他们提出“万物皆数”的观点，认为整个宇宙可以用数及数的关系统一起来. 在毕达哥拉斯学派的观念中，科学的世界与美的世界是按数的规律进行组织、统一，是按美的方式进行设计，按美的规律来发展. 尽管他们这种观点是唯心的，但他们毕竟洞察到整个数的系统的统一与和谐. 正如他们所说的，“哪里有数，哪里就有美”. 数学从美的角度来看，是人的审美活动的结果，是闪耀着人们智慧和创造力的和谐统一的艺术宫殿. 欧几里得利用几个原始概念和几组公理、公设去演绎出欧氏几何体系，去统一当时整个几何系统. 瑰宝《几何原本》的问世，在数学史上树立起演绎几何的丰碑，意义深远，影响悠久. 19 世纪后半期，著名数学家克莱茵用变换群的观点统一几何学. 他认为，不同的几何学就是研究不同变换下的不变性. 欧氏几何是研究刚体变换（平移、旋转、反射）下的不变量，射影几何学是研究射影变换下的不变量. 20 世纪初美国数学家毕尔霍夫提出用“格”的概念统一代数系统的各种理论和方法. 布尔巴基学派用代数结构、序结构和拓扑结构将数学的各个分支联系起来，组成一个整体，更是体现数学的统一美. 冯・诺伊曼说：“我认为数学家无论选择题材还是判断成功的标准，主要是美学的.”数学家以美为标准，将数学公式、定理统一起来. 如圆的切线定理、割线定理、切割线定理统一为圆幂定理；双曲线、抛物线、椭圆统一为二次曲线，在极坐标系中圆锥曲线方程统一为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}.$$

e 的大小决定二次曲线的形状. 圆（棱）锥、台、柱体的体积公式可以统一为

$$V=\frac{h}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2).$$

其中 h 为立体的高，S_1，S_2 分别为上、下底面的面积. 当 $S_1=0$ 时，成为锥体的体积公式，当 $S_1=S_2$ 时，成为柱体的体积公式. 数学的统一性是人的本质力量对象化，是数学家对数学进一步审美创造的结果.

2　简洁美

开普勒认为,数学上愈简单的规律,便愈接近自然,愈美.而且他还认为,科研的目的就是寻找简单和优美的数学关系.他说,他之所以相信哥白尼学说,这是因为该体系在数学上更简洁和谐.$e^{i\pi}+1=0$ 更是将具体的 0,1,i 与最抽象的 e,π 简洁而又奇妙地联系起来.这种简洁的美给我们以一种欢悦的审美体验.数学的简洁美不仅体现在数学内容上,而且还体现在数学表达式和理论体系上.莱布尼兹采用简单的积分符号表达概念和积分运算丰富的内涵.皮亚诺用了三个原始概念、五个公理的简单的逻辑结构,建立现代数学大厦.简单的算术公理体系与庞大复杂的数学领域形成鲜明的对照,人类的创造力在此得到充分体现,我们不能不为皮亚诺的算术公理体系的简洁而折服.在乘法运算上,$n \cdot a$ 简洁地表示了 n 个数 a 相加;而 a^n 简洁地表示了 n 个数 a 相乘.这里对十分冗长、复杂的运算采用极其简单明了的运算表示,给予我们心灵一种美的体验、享受.

3　对称美

有人说过:"我从小就爱上了椭圆,因为它是那样的完美."毕达哥拉斯认为:"一切立体图形中最美是球形,一切平面图形中最美的是圆形."这些图形体现对称美.数学家魏尔曾经说过:"美和对称是紧密相连的."对称美是数学美的重要特征之一、这种对称能给人一种均衡、完美的感觉.亚里士多德指出:"秩序和对称是美的重要因素,而这两者都能在数学中找到."对称方程组解的对称、对称矩阵、海伦公式中三边轮换对称、轴对称图形、中心对称图形等,都体现了对称美,给我们匀称、平衡的感受.对称能激发人的美感,成为我们创造的契因,帮助我们找到解决问题的途径.

4　和谐美

和谐美即雅致、协调.智慧女神雅典娜、爱神维纳斯等一个个不朽的雕

塑被黄金分割赋予了永恒的魅力，被视为美的化身. 一朵多重花瓣的数目依次排成“斐波那契数列”，愈到后面前后两数之比愈接近黄金比. 多重花瓣的黄金数泄露了秘密，生物生长遵循最优化原则. 符合黄金比的矩形和其它一些生物通过人的审美活动，获得了审美体验，给予了和谐的愉悦体验. 同样，数学内部也是协调的. 罗素和怀特海的《数学原理》，从逻辑学的概念和原理出发，用纯逻辑演绎方法推导出几乎全部数学的基本概念和基本原理. 布尔巴基学派别出心裁地以集合论为基础，采用公理化方法依结构观点重新整理数学各分支，出版巨著《数学原本》. 从数学的相容性来看，数学各分支协调，整个数学体系也是协调的、无矛盾的. 在数学内部不可能出现命题与否命题同时成立的现象. 因而，数学被人们认为称为绝对真理. “美是真理的光辉”. 因此，数学体现的协调性，即和谐美是数学美的重要特征，也是数学家追求的方向.

5 整齐美

$(a+b)^n$ 的二项展开式 $C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}+C_n^2a^{n-2}+\cdots+C_n^nb^n$ 的各项系数 C_n^k 由 k 从 0 取到 n，排列整齐、有序. 还有 n 阶行列式由 n^2 个元素按 n 行 n 列整齐划一的排列，$n\times m$ 阶矩阵由 nm 个元素排成 n 行 m 列整齐有序的矩形，给人们以整齐美的感受. 数学家对数学整齐有序的追求，也促进数学的发展. 如通过一元一次方程有一个解，一元二次方程有两个解，一元三次方程有三个解，一元四次方程有四个解，并根据特殊的高次方程根的研究，发现次数与根的一致性，从而提出一元 n 次方程有 n 个根的猜想. 这一猜想被高斯给予了严格的证明，被称为代数基本定理.

6 奇异美

“哪里有数，哪里就有美”. 毕达哥拉斯认为和谐的数，构成整个完美的宇宙世界. 但无理数$\sqrt{2}$的出现，这是对数的和谐的严重挑战. 数由有理数向实数扩充. 间断函数对连续函数是奇异的. 人们一直认为连续函数就是可

微函数.可是连续而不可微函数的出现,是对连续函数和谐的打击.一时间,人们热衷于构造连续而不可微的函数,体验数学的奇异美.牛顿—莱布尼兹积分似乎对一切函数都是和谐的,但狄利克雷函数

$$D_x=\begin{cases}1, \text{当 } x \text{ 为有理数时;}\\ 0, \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

出现,常规积分失灵了.但这种奇异性给积分学带来了勃勃生机,勒贝格积分产生了.可是,好景不长,不可测积分出现了,勒贝格积分出现了奇异,导致彼隆积分问世.数学中的奇异处处可见,如奇异点、奇异方程、奇异曲线、奇异解、奇异级数、奇异算子等,极度的奇异,数不胜数.培根说得好:"没有一个极美的东西不是在调和中有某种奇异!"徐利治教授说得更妙:"奇异是一种美,奇异到极度更是一种美".

在欧氏几何年代里,非欧几何的思想是奇异的、荒诞的;但最终又是协调的、合理的.数学的奇异孕育着数学发展的巨大可能.悖论的出现对数学是不协调的,但却导致罗素的逻辑主义、布劳威尔的直觉主义、希尔伯特的形式主义的产生,从而达到新的和谐,推动数学发展.

数学由和谐到出现奇异,再到和谐与奇异的统一、负整数在算术中是奇异的,在整数中达到和谐、统一;分数在整数中是对和谐的变异,但在有理数中得到完美的统一;无理数在有理数中难以被接受,却在实数中得到完美的协调;虚数被认为是实数的鬼魅,是太空虚境,然而在复数中达到和谐完美统一、似乎奇异是对和谐的冲击,但随着人们认识的不断深入,两者达到更高层次的协调统一,奇异糅合到更美的和谐之中.出现新的奇异之时,即是达到更高和谐的时机到来.数学的发展就像精彩的故事一样,波澜起伏,扣人心弦,既在情理之中,又在意料之外,是奇异与和谐的神奇的完美统一.

参考文献

[1]汪晓勤,等. 荒岛寻宝:HPM 视角下的复数教学[J]. 数学教学,2003(6).

[2]张秀琴,杨改锋. 方程发展史略[J]. 数学与管理,1993(5).

[3]方舟子. 数学史上一个大恩怨的真相[J]. 教师博览,2006(12).

[4]汪晓勤. 自然数幂和公式之历史发展[J]. 中学数学教学参考,1995(5).

[5]许伟荣. 还原历史文化,精彩数列学习[J]. 数学教学研究,2011(8).

[6]李鹏奇. 函数概念 300 年[J]. 自然辩证法研究,2001(3).

[7]王昌,等. 函数概念诞生的标志[J]. 西北大学学报(自然科学版),2009(1).

[8]彭林,等. 函数概念的形成与发展[J]. 中学数学教学参考,2003(11).

[9]王青建. 函数概念[J]. 大连教育学院学报,1999(3).

[10]张映姜. 传承历史文化,进化函数概念[J]. 中学数学教学参考,2013(1-2).

[11]张映姜. 悠久的等周原理,精彩的文化体验[J]. 中学数学教学参考,2013(8).

[12]龚升,张德健. 微积分五讲[J]. 数学传播,2006(4).

[13]张映姜,等. 利用对数文化,"活化"对数教学[J]. 数学教学研究,2010(2).

[14]张国定. HPM 视角下数学教学设计:从正弦定理教学设计谈起[J]. 数学教学研究,2010(3).

[15]魏明志.从皇后纪塔娜围地谈谈“等周问题”[J].数学教学,2007(5).
[16]沈杰.贪婪的巴霍姆与聪明的狄多——等周问题趣谈[J].中学生数学,2007(11).
[17]龚德行,等.圆的文化意义[J].中学数学教学参考,2004(11).
[18]陈美英,等.利用历史文化,加强三角教学[J].数学教学研究,2009(10).
[19]许海深.谈数学中的符号及其美感[J].齐齐哈尔大学学报(自然科学版),2004(4).
[20]张映姜.欣赏圆锥曲线体验历史文化[J],数学通报,2012(11).
[21]刘建军.组合学思想的东方起源[J].西北大学学报(自然科学版),2001(10).
[22]孙小礼,张祖贵.莱布尼兹与微积分[J].数学的实践与认识,1987(4).
[23]倪文锦,关于文言文有效教学内[J].中学语文教与学,2009(4).
[24]徐传胜.概率论简史[J].数学通报,2004(10).
[25]陈希孺.数理统计学小史[J].数理统计与管理,1998(2).
[26]张映姜.学习经典案例,体验数学文化[J].中小学电教,2012(11).
[27]王晓.非一般的数学课堂,非一般的教学情境[J].广东教育(综合版),2006(3).
[28]殷启正,等.试论作为数学发展动力的数学美[J].曲阜师范大学学报(自然科学版),1989(2).
[29]王青建.古代的负数记法[J].辽宁师范大学学报(自然科学版),1998(3).
[30]罗志华,等.欣赏圆锥的名题,体验数学文化[J].数学教学研究,2010(8).
[31]陈江辉.排列组合学习新简略三种[J].中学数学月刊,2003(6).
[32]梁宗巨,等.世界数学通史(上)[M].沈阳:辽宁教育出版社,2001.
[33]梁宗巨,等.世界数学通史(下)[M].沈阳:辽宁教育出版社,2000.

[34]杜石然，孔国平. 世界数学史[M]. 长春：吉林教育出版社，1996.

[35]钱宝琮. 中国数学史话[M]. 北京：中国青年出版社，1957.

[36]张楚廷. 数学文化[M]. 北京：高等教育出版社，2003.

[37]梁宗巨. 世界数学史简编[M]. 沈阳：辽宁人民出版社，1980.

[38]谢宇. 数学——智慧的源泉[M]. 南昌：百花洲文艺出版社，2010.

[39]薛有才. 数学文化[M]. 北京：机械工业出版社，2010.

[40]徐品方. 数学简明史[M]. 北京：学苑出版社，1992.

[41]斐波那契. 计算之书[M]. 纪志刚. 北京：科学出版社，2008.

[42][美]Sarton，G. 科学的生命[M]. 北京：商务印书馆，1987.

[43]吴文俊. 中国数学史大系(2)[M]. 北京：北京师范大学出版社，1998.

[44]赵籍丰. 中国古代数学[M]. 北京：北京科学技术出版社，1995.

[45]郭彬彩，等. 数学史与数学家[M]. 西安：西安地图出版社，2002.

[46]王永建. 数学的起源与发展[M]. 南京：江苏人民出版社，1981.

[47][美]M. Kline. 古今数学思想(2)[M]. 张理京，等，译. 上海：上海科学技术出版社，1979.

[48]李文林. 数学的进化[M]. 北京：科学出版社，2005.

[49]邹瑾，等. 开心数学[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2003.

[50]张景中. 从$\sqrt{2}$谈起[M]. 北京：中国少年儿童出版社，2004.

[51]易南轩，等. 多元视角下的数学文化[M]. 北京：科学出版社，2007.

[52]张维忠. 数学教育中的数学文化[M]. 上海：上海教育出版社，2011.

[53]汪晓勤，韩祥临. 中学数学中的数学史[M]. 北京：科学出版社，2002.

[54]张楚廷. 数学与创造[M]. 大连理工大学出版社，2008.

[55]北京创造学会. 创造创新五百问[M]. 北京：民主与建设出版社，2005.

[56]欧小松，等. 创新教育学[M]. 长沙：中南工业大学出版社，2000.

[57]袁小明. 数学史话[M]. 济南：山东教育出版社，1985.

[58][美]莫里兹. 数学的本性[M]. 朱剑英，译. 大连：大连理工大学出版社，2008.

[59]保罗·J·纳欣.虚数的故事[M].朱惠霖,译.上海:上海教育出版社,2008.

[60]M.克莱茵.古今数学思想 2[M].张理京,等,译.上海:上海科技出版社,1979.

[61]徐品方,等.中学数学简史[M].北京:科学出版社,2007.

[62]傅钟鹏.勾股先师商高[M].天津:新蕾出版社,2001.

[63]王青建.数学史简编[M].北京:科学出版社,2004.

[64]李文林.数学史概论[M].北京:高等教育出版社,2002.

[65]葛帆.数学的故事[M].哈尔滨:哈尔滨出版社,2007.

[66]霍华德·伊夫斯.数学史概论[M].欧阳绛,译.哈尔滨:哈尔滨工大出版社,2009.

[67]哈尔·赫尔曼.数学恩仇录[M].范伟,译.上海:复旦大学出版社,2009.

[68]欧阳绛.数学的艺术[M].北京:农村读物出版社,1997.

[69]伊夫斯.数学史概论[M].欧阳绛,等,译.太原:山西经济出版社,1993.

[70]斯科特.数学史[M].侯德润,等,译.桂林:广西师范大学出版社,2002.

[71]李心灿.数坛英豪[M].北京:科学普及出版社,1989.

[72]姬小龙.中外数学拾零[M].兰州:甘肃教育出版社,2004.

[73]伊夫斯.数学史上的里程碑[M].欧阳绛,等,译.北京:北京科技出版社,1990.

[74]李益中.简明数学史教程[M].北京:科学文献出版社,1995.

[75]高希尧.数海钩沉——世界数学名题选辑[M].西安:陕西科学技术出版社,1982.

[76]沈康身.历史数学名题赏析[M].上海:上海教育出版社,1998.

[77]白寿彝.中国通史[M].上海:上海人民出版社,1994.

[78]吴文俊.九章算术与刘徽[M].北京:北京师范大学出版社,1982.

[79]林永伟，叶立军. 数学史与数学教育[M]. 杭州：浙江大学出版社，2004.
[80]展涛. 数与形[M]. 济南：山东科学技术出版社，2007.
[81][美]Bell. 数学精英[M]. 徐源，译. 北京：商务印书馆，1991.
[82][美]M. Kline. 古今数学思想(1)[M]. 张理京，译. 上海：上海科学技术出版社，2002.
[83]萧文强. 数学证明[M]. 南京：江苏教育出版社，1990.
[84][美]M. Kline. 古今数学思想(2)[M]. 朱学贤，等，译. 上海：上海科学技术出版社，2002.
[85]中外数学简史编辑部. 外国数学简史[M]. 济南：山东教育出版社，1987.
[86]数学通报编委会. 初等数学史[M]. 北京：科学技术出版社，1959.
[87]毛人凤，等. 话说三角——三角学原理与应用[M]. 北京：中国大百科全书出版社，2006.
[88]柯仁乌若夫. 三角学专门教程[M]. 李荣冻，译. 上海：商务印书馆，1953.
[89]蔡宗熹. 等周问题[M]. 北京：科学出版社，2002.
[90]黄忠裕. 初等数学建模[M]. 成都：四川大学出版社，2004.
[91]杜瑞芝. 数学史辞典[M]. 济南：山东教育出版社，2000.
[92]刘建军. 组合学史若干问题研究[D]：西安：西北大学，2003.
[93]解延年，等. 数学家传[M]. 长沙：湖南教育出版社，1987.
[94]王仲春，等. 数学思维与数学方法论[M]. 北京：高等教育出版社，1989 .
[95]张泽湘. 二次曲线[M]. 上海：上海教育出版社，1981：200.
[96]张贤科. 古希腊名题与现代数学[M]. 北京：科学出版社，2007.
[97]韩雪涛. 从惊讶到思考 数学的印迹[M]. 长沙：湖南科学技术出版社，2007.

[98]王幼军，等. 著名数学家和他的一个重大发现[M]. 济南：山东科学技术出版社，1998.

[99]张红. 数学简史[M]. 北京：科学出版社，2007.

[100]李必成. 几何学大厦的基石，帮你学几何[M]. 福州：福建人民出版社，1986.

[101]沈康身. 数学的魅力 1[M]. 上海：上海辞书出版社，2006.

[102]杨世明. 三角形趣谈[M]. 上海：上海教育出版社，1989.

[103]王亚辉. 数学史选讲[M]. 合肥：中国科技大学出版社，2011.

[104]左宗明. 世界数学名题选讲[M]. 上海：上海科学技术出版社，1990.

[105]陆乃超，等. 世界数学名题选[M]. 上海：上海教育出版社，1989.

[106]梁宗巨. 数学历史典故[M]. 沈阳：辽宁教育出版社，1992.

[107]黄家礼. 几何明珠[M]. 北京：科学普及出版社，1997.

[108]包芳勋，等. 阿拉伯数字的兴衰[M]. 济南：山东教育出版社，2009.

[109][美]H. 伊夫斯. 数学史概论[M]. 太原：山西人民出版社，1986.

[110]李迪. 中国数学通史・上古到五代卷[M]. 南京：江苏教育出版社，1997.

[111]欧几里得. 几何原本[M]. 燕晓东，译. 江苏人民出版社，2011.

[112][美]M. 克莱茵. 西方文化下的数学[M]. 张祖贵，译. 复旦大学出版社，2007.

[113][英]鲍尔，等. 数学游戏与欣赏[M]. 杨应辰，等，译. 上海：上海教育出版社，2001.

[114]单墫. 数学名题词典[M]. 南京：江苏教育出版社，2002：373-374，428-445，956-971.

[115]王长烈，朱煜民. 世界数学名题趣题选[M]. 长沙：湖南教育出版社，1998：186.

[116]单墫. 平面几何中的小花[M]. 上海：华东师范大学出版社，2011.

[117]李心灿. 微积分的创立者及其先驱[M]. 北京：高等教育出版社，2002.

[118]张顺燕. 数学的美与理[M]. 北京:北京大学出版社,2004.
[119]河北教育学院编写组. 数学史小词典[M]. 石家庄:河北教育出版社,1989.
[120]郭思乐. 数学素质教育论[M]. 广州:广东教育出版社,1990.
[121]史宁中. 数学思想概论[M]. 长春:东北师范大学出版社,2009.
[122]鲁品越. 西方科学历程及其理论透视[M]. 北京:中国人民大学出版社,1992.
[123][美]帕帕斯. 数学趣闻集锦[M]. 张远南,等,译. 上海:上海教育出版社,1998.
[124]波尔德. 著名几何问题及其解法:尺规作图的历史[M]. 北京:高等教育出版社,2008.
[125]大卫布拉特纳. 神奇的 π[M]. 潘恩典,译. 汕头:汕头大学出版社,2003 .
[126]莫德. 欧几里得几何原本研究[M]. 呼和浩特:内蒙古人民出版社,1992.
[127]梅向明,等. 尺规作图话古今[M]. 长沙:湖南教育出版社,2000.
[128]B. 波尔德. 尺规作图的历史[M]. 郑元禄,译. 北京:高等教育出版社,2008.
[129]张贤科. 古希腊名题与现代数学[M]. 北京:科学出版社,2007.
[130]沈康身. 历史数学名题赏析[M]. 上海:上海辞书出版社,2002:588-597.
[131]靳平. 数学的 100 个基本问题[M]. 太原:山西科学技术出版社,2004. 2008—2009.
[132]徐品方,张红. 数学符号史[M]. 北京:科学出版社,2006:272-288. 290-291.
[133]贝尔热. 组合学原理[M]. 陶懋欣,译. 上海:上海科学技术出版社,1986.

[General Information]
书名=数学的历史文化赏析
作者=张映姜，陈美英，李晓培著
页数=182
SS号=13378199
DX号=
出版日期=2013.08
出版社=湖南师范大学出版社